数理解析研究所講究録
第277巻 1976年 7-10

多くの多重可移suborbitをもつ原始置換群について

阪大 理学部 沼田 稔

Gは有限集合Ω上の原始置換群 Ω×Ω上自明でないG-orbitのすべてを$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$, $\Delta_1,\cdots,\Delta_t$と表わし，Ωの点αに対し $G_\alpha=\{g\in G \mid \alpha^g=\alpha\}$が $\Gamma_i(\alpha)=\{\beta\in\Omega \mid (\alpha,\beta)\in\Gamma_i\}$, $(i=1,\cdots,s)$上2-transで $\Delta_i(\alpha)=\{\beta\in\Omega \mid (\alpha,\beta)\in\Delta_i\}$ $(i=1,\cdots,t)$上 2-transでないとする時 sとtの関係はどうなるか？ この問題について一般的には今まで何もわかっていなかった。

$t=0$の時 GがΩ上3-trans 又は $|\Omega|=p$, $|G|=2p$ (p: odd prime) であることが簡単にわかる。

$t=1$の時 Peter, J. Cameron は"Primitive groups with most suborbits doubly transitive" Geometriae Dedicata 1, (1973) に於て $s\leqq 2$ であること 特に$s=2$の時 degree や subdegree, intersection number が一つのparameterで書き尽くされることを示した。

このP.J. Cameronの論文は、Cameronの次のLemmaと共に一般にdがtのある関数で押えられるということを暗示している。

Lemma. G_αは$\Gamma_i^*(\alpha)=\{\beta\in\Omega \mid (\beta,\alpha)\in\Gamma_i\}$上2-trans

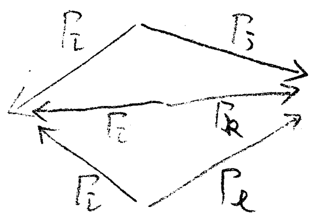
Lemma. $|\Gamma_i(\alpha)|>3$の時

$\Gamma_i\circ\Gamma_j^*(\alpha)=\{\beta\in\Omega \mid \Omega$の元$\gamma$が存在し$(\alpha,\gamma)\in\Gamma_i,(\beta,\gamma)\in\Gamma_j\}$

にはG_αが2-transに作用しないG_α-orbitを含む

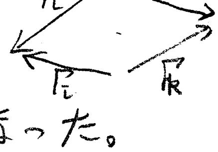
(P.J. CameronのLemmaはもっと特別な場合についてである).

この予想を証明するため手始めに$t=2$の時を考えこの時は$d\leq 4$になることがわかった。$t=2$の時の証明より一般には$d\leq 2t$となると予想した。これを証明するためにはグラフ$(\Omega,\Gamma_i),(i=1,\cdots,d)$の関係で次の図が存在しないことが証明されればよいことがわかる。



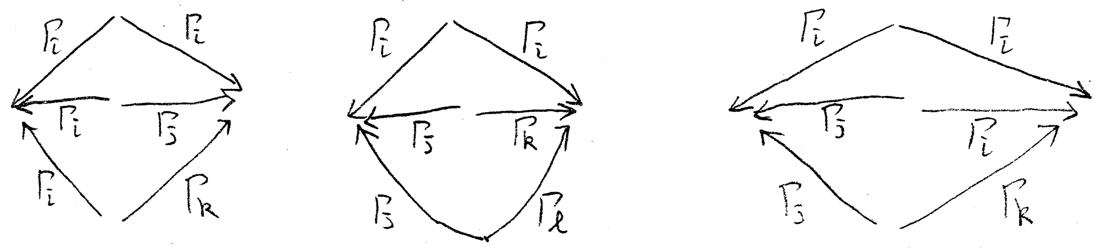
$\Gamma_i,\Gamma_j,\Gamma_k,\Gamma_l$ (*)

上の図の非存在の証明には図



が存在する条件を詳しく調べることが必要になった。

存在条件を詳しく調べる中でさらに次の類似の図もすべて存在しないことが証明された。



$\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k, \Gamma_l$ $(\neq)$

これらのことから次の定理が導かれる。

定理1　$t>1$,　$|\Gamma_i(\alpha)|, |\Delta_j(\alpha)| > 3$ $(i=1,\cdots,s.\ j=1,\cdots,t)$

の時　$s \leqq 2t-\gamma$

ただし　$\gamma = \#\{\Delta_i \mid \Delta_i = \Gamma_j \circ \Gamma_j^*,\ j=1,\cdots,t\}$

特に　$\gamma=1$ の時は

$s \leqq 2t-2$

定理の不等式はもっとよくなり　$s \leqq t$ が成り立つのではないかと予想している。

定理1は一般論であり　個々の場合についてはもっと多くのことが知れる　次の定理はその一つである。

定理2.　$\gamma=t>1$ の時　$t=s=2$ であり

$G \cong J_1$ (small Janko simple group), $G_\alpha \cong PSL(2,11)$.

証明方法は、permutation character に関する簡単な結果と、図を二通りに数えるという常套手段を使うだけである。

これから定理2のようにうまくいくかわからないが、ある特別の場合について、その原始置換群を決定するという問題がおきてくる。 G_α がかなり多くの suborbit 上 2-trans に作用する原始置換群の存在をたしかめたり、その型をきめていくことは興味ある問題である。