数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 22-26

有限体上のユニタリー群の既約指標

阪大 理　川中 宣明

有限体上のユニタリー群の複素既約指標についての筆者の結果 [1] を §1 で，G. Lusztig [3] と B. Srinivasan [4] の結果を §2 で述べる．

§1. K を標数 $p>0$ の代数的閉体，k をその有限部分体とする．任意の自然数 m に対し k_m $(\subset K)$ を k の m 次拡大体とする．$\mathcal{G}=GL_n(K)$ の抽象群としての自己同形 σ を

$$x^\sigma = (x_{ji}^q)^{-1} \qquad (x=(x_{ij})\in\mathcal{G},\ q=|k|)$$

によって定義する．自然数 m に対して

$$\mathcal{G}_{\sigma^m}=\{x\in\mathcal{G} \mid x^{\sigma^m}=x\}$$

と置くと，

$$\mathcal{G}_{\sigma^m}=\begin{cases} GL_n(k_m) & ,\ m\text{ が偶数のとき}, \\ U_n(k_{2m}) & ,\ m\text{ が奇数のとき}, \end{cases}$$

となる．以下，m をひとつ固定し，$G=\mathcal{G}_{\sigma^m}$，$G_\sigma=$

$G_\sigma = U_n(k_2)$ と置く．Aを$\sigma|G$により生成されるm次巡回群とする．以下，簡単のため，$\sigma|G$を単にσと記す．AGをAとGとの半直積とする．即ちAGは集合としてはAとGとの直積であって，積法則は $x^\delta = \delta^{-1}x\delta$ ($x \in G$, $\delta \in A$) によって定められているものとする．Gの元xに対して，$N(x) = (\sigma x)^m = x^{\sigma^{m-1}} x^{\sigma^{m-2}} \cdots x^{\sigma} x$ と置く．

補題1. (a) xをGの元とする．$N(x)$のGにおける共役類$K_G(N(x))$はG_σの元を含む．さらに$K_G(N(x)) \cap G_\sigma$は，G_σのひとつの共役類をなす．

(b) x, yをGの元とし，σxとσyがAGの元として共役であるとする．このとき，$K_G(N(x)) \cap G_\sigma = K_G(N(y)) \cap G_\sigma$.

(c) $\{\sigma\} \times G$のAG-共役類の全体からG_σの共役類への対応nを

$$n(K_{AG}(\sigma x)) = K_G(N(x)) \cap G_\sigma$$

で定義すると，nは全単射である．

(d) Gの任意の元xに対して，

$$|K_{AG}(\sigma x)|\,|G|^{-1} = |K_G(N(x)) \cap G_\sigma|\,|G_\sigma|^{-1}.$$

補題2. Hを有限群，AをHの自己同形σで生成される有限巡回群とする．Hの既約指標χがσで固定される（即

ち，$\chi(x)=\chi(x^{\sigma})$ $^{\forall}x\in H$ ）とする。このとき，半直積 AH の既約指標 $\tilde{\chi}$ で，$\tilde{\chi}|H=\chi$ となるようなものが存在する。

定理. $(m,p)=1$ と仮定する。χ を G の σ で固定される既約指標，$\tilde{\chi}$ をその AG への拡張（補題2参照）とする。このとき，χ のみによって決まる，G_{σ} の既約指標 ψ_{χ} で次式を満たすものが一意的に存在する。

$$\tilde{\chi}(\sigma x)=\pm\zeta^{a}\psi_{\chi}(n(x))$$

$$(x\in G,\ n(x)\in K_{G}(N(x))\cap G_{\sigma}).$$

ここに，$\zeta=\exp(2\pi i/m)$，$a\in\mathbb{Z}$。さらに，G の σ で固定される既約指標の全体から G_{σ} の既約指標全体への写像 $\chi\longrightarrow\psi_{\chi}$ は，全単射である。特に，$m=2$ の場合を考えると $U_{n}(k_{2})$ （$\mathrm{char}(k)\neq 2$）のすべての既約指標は，$GL_{n}(k_{2})$ の σ で固定される既約指標から上の方法により構成されることがわかる。

上の定理と Green [5] の結果を組み合わせることにより，$U_{n}(k_{2})$ の既約指標と共役類とが互に双対な形にパラメトライズされることもわかる（[1]）。

§2. $\mathcal{G}$を有限体k上で定義された連結かつ reductive な線形代数群, σをそのFrobenius準同形とする. $\mathcal{P}$を$\mathcal{G}$の放物型部分群, $\mathcal{L}$を$\mathcal{P}$のLevi部分群とし, $\mathcal{L}$はσで固定されると仮定する. (しかし, $\mathcal{P}$については何も仮定しない.)
πを$\mathcal{L}_\sigma = \{x \in \mathcal{L} \mid x = x^\sigma\}$の一般指標とする. Deligne-Lusztig [2] の結果と方法を用いて, Lusztig [3] は, $\mathcal{G}_\sigma$の一般指標 $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}\subset\mathcal{P}}(\pi)$ を定義した. 対応 $\pi \longrightarrow R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}\subset\mathcal{P}}(\pi)$ は, 次の性質を持つ.

定理. (a) $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}\subset\mathcal{P}}(\pi)$ は π に関し $\mathbb{Z}$-linear.

(b) $\mathcal{P}$もσで固定される時は, $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}\subset\mathcal{P}}(\pi)$ は, πを$\mathcal{P}_\sigma$の指標と考えて$\mathcal{G}_\sigma$に誘導したものと一致する.

(c) $\mathcal{T}$を, σで固定される極大トーラス, $\mathcal{B}$を$\mathcal{T}$を含むような$\mathcal{G}$のBorel部分群とすると, $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}\subset\mathcal{B}}(\theta)$ (θは$\mathcal{T}_\sigma$の指標) は, [2] で導入された $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(\theta)$ と一致する.

(d) $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ とすると, $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{L}\subset\mathcal{P}}(R^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\theta)) = R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(\theta)$.

以下, 簡単のため $\mathcal{G} = GL_n$ とする. この時, $\mathcal{G}_\sigma$ は $GL_n(k)$ か $U_n(k_2)$ (k_2 = kの2次拡大体) である. 上の定理から, 次が従う.

系. θを$\mathcal{L}_\sigma$の一次元指標とすると,

$$|\mathcal{L}_\sigma|^{-1} \sum_{\mathcal{T}\subset\mathcal{L}} |\mathcal{T}_\sigma| R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{T}}(\theta|\mathcal{T}_\sigma)$$

は，G_σ の一般指標である．ただし，右辺の和は，む の σ で固定される極大トーラス全体の上をわたる．

$G_\sigma = GL_n(k)$ の時は，上で構成された一般指標は，Green [5] の記号で $I_s^k[\nu]$ と書かれているものである．$G_\sigma = U_n(k_2)$ のすべての既約指標を $R_T^G(\theta)$ 達の具体的に一次結合で書き表わすには，Green の方法をまねるだけでよい．

文献

[1] N. Kawanaka, On the irreducible characters of the finite unitary groups, to appear.

[2] P. Deligne and G. Lusztig, Representations of reductive groups over finite fields, Ann. Math., 103 (1976), 103-161.

[3] G. Lusztig, On the finiteness of the number of unipotent classes, to appear.

[4] B. Srinivasan, The decomposition of some Lusztig-Deligne representations of finite classical groups, to appear.

[5] J.A. Green, The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 80 (1955), 402-447.