数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 35-39

既約表現の次数がすべてπ-数であるπ-可解群について

阪大 理　八尾 隆

有限群 G に対して, $\mathrm{Irr}(G)$ で G の複素既約表現の指標の集合を表すことにする。N を G の正規部分群とすれば, 任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して, θ を $\chi|_N$ の一つの既約成分とすれば, $\chi(1)/\theta(1)$ は $|G:N|$ の約数となることが知られている。N. Ito の定理と合せて, 次のことが又知られている。『abelian subgroup A が G で subnormal の時, 即ち A が G と normal series で結ばれる時, 任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $\chi(1)$ は $|G:A|$ を割りきる』

そこで, 逆に G の character degrees $\{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ に関する情報が与えられた時, G はどの程度の"大きな" normal (or subnormal) abelian subgroup を持つだろうか?という問題が考えられる。今回得た結果は, この方向の I.M. Isaacs − D.S. Passman (以下 I−P と略す) による結果の拡張である。

まず π を素数からなるある集合とし, 次の条件を考える。

<u>定義</u> 群Gが c.d.π (character degrees π) を満たすとは，任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の次数 $\chi(1)$ が π-数 (即ち，$\chi(1)$ の素因数がすべてπの元) であることをいう。

例えば，Gが normal abelian Hall π'-subgroup を持つなら，Itoの定理により，Gは c.d.π を満たす。これについては次の場合に逆も成立することが得られた。

<u>定理 1</u> Gをπ-separable group とする。この時Gが c.d.π を満たすための必要十分条件は，Gが normal abelian Hall π'-subgroup を持つことである。

証明は，P. X. Gallagher の一定理と Schur-Zassenhaus の定理を結びつけることによって示される。π-solvable π-group は solvable だから，これより直ちに次を得る。

<u>系 2</u> c.d.π を満たすπ-solvable group は solvable。

一般に c.d.π を満たす群は次の時 solvable となる。これは W. Burnside の $p^a q^b$-定理のほんの少しの拡張となっている。

定理3. G は c.d.π を満たす群とする。もし $|\pi| \leqq 2$ ならば, G は solvable。ただし $|\pi|$ は π に含まれる元の個数を表すものとする。

G が単純群の時, Burnside の lemma によれば, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ の次数が $|G : C_G(x)|$ と互いに素となる $x \in G$ に対しては $\chi(x) = 0$ となるから直交関係を用いて上定理が示される。

さて, I-P は c.d.$\{p\}$ を満たす群を扱ったが, かような群は必然的に solvable となることに注目し, 上記結果 (2〜3) を用いて以下のように彼等の結果の拡張を得ることができる。

自然数 n の素因数の個数 (重複度を数える) t を n の total exponent と呼び, $t = e(n)$ で表すことにする。

定義 群 G が r.x.e (representation exponent e) を満たすとは, 任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して, $\chi(1)$ の total exponent $e(\chi(1))$ が e 以下であること。

r.x.0 を満たす群は linear character しか持たない群即ち abel 群である。又 r.x.1 を満たす群は solvable となることが, I-P によって調べられている。しかし $e \geqq 2$ の時もはや nonsolvable な r.x.e を満す群がある。なおこの定

義は，c.d.$\{p\}$を満たす群に対しては I-P のそれに一致する。

<u>主定理I</u>　群Gは c.d.π かつ r.x.e を満たすとする。さらに$|\pi|\geqq 3$ならば，Gはπ-solvable であるとする。この時Gは normal series

$$G=A_e\triangleright B_{e-1}\triangleright A_{e-1}\triangleright\cdots\triangleright B_0\triangleright A_0$$

を持ち，かつ各i $(=1,2,\cdots,e)$に対して素数$p_i\in\pi$が存在して次の条件(1)～(4)を満たす。

(1)　A_i は r.x.i かつ c.d.π を満たす。

(2)　A_i/B_{i-1} は cyclic π_i-group，ただし$\pi_i=\pi-\{p_i\}$.

(3)　B_{i-1}/A_{i-1} は elementary abelian p_i-group.

(4)　$|A_i:A_{i-1}|$ はπ-数で，$e(|A_i:A_{i-1}|)\leqq 2i+1$。

特にGは，$|G:A_0|$がπ-数で，$e(|G:A_0|)\leqq e(e+2)$を満たす subnormal abelian subgroup A_0を持つ。

この定理で$\pi=\{p\}$とすると，$p_1=p_2=\cdots=p_e=p$，従って$A_i=B_{i-1}$となり，I-P の結果が得られる。又，Gが上定理の仮定を満たすとし，PをGのp-Sylow 群とすると，$p\notin\pi$ならば，Pは abel 群，$p\in\pi$であってもPの交換子群列の長さは$e+1$でおさえられることが直ちにわかる。

ところで定理IのGは，“より大きな” subnormal abelian

subgroup を持つかも知れない。次にこの問題を考える。

まず次のような関数を考える．関数 f_s (resp. f_n) は次の条件を満たすもので，しかもその条件を満たすもののうち最小の値をとるものとする。条件：G を r.a.e を満たす任意の solvable (resp. nilpotent) group とする時，subnormal abelian subgroup A が存在し，$e(|G:A|) \geqq f_s(e)$ (resp. $f_n(e)$) を満たす。

定理Ⅰから，f_s が（従って f_n も）存在し，かつ $f_n(e) \leqq f_s(e) \leqq e(e+2)$ となることがわかる．

主定理Ⅱ　上記関数 f_s 及び f_n は存在し，次式を満たす。

(1)　$f_n(0)=0$，$f_n(1)=2$，及び　$e \geqq 2$ の時

$2e \leqq f_n(e) \leqq 4e-[\log_2 8e]$，ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする，

(2)　$f_n(e) \leqq f_s(e) \geqq \frac{1}{2}e(e+3)$．

これより特に次を得る．

$f_n(0)=f_s(0)=0$，$f_n(1)=f_s(1)=2$，$f_n(2)=4$，$f_s(2)=4$ or 5．

なおこの定理に関連して，I-P による c.d.{p} を満たす群のときと同様に，$f_n(e)$ は"本質的"に e の一次関数となることが示されるが，$f_s(e)$ の方が"二次"から"一次"へ改善できるかどうか今後調べたい課題でもある．