数理解析研究所講究録
第277巻 1976年 40-50

成分型の群について

東大教養　近藤 武

§1 序

M. Aschbacherによる画期的な仕事

(A) On finite groups of component type
Illinois Jour Vol 19 (1975)

が，一昨年の札幌国際シンポジウムにおいて発表されて以来いわゆる成分型の群についての研究は著しい進展を見せ，こゝ一二年のうちには，成分型の群の研究は一応の完成を見るのではないかと云われている。（最近の進展については，五味・山田・宮本の報告を参照） こゝでは上の論文(A)の内容を解説する。この論文は最近の有限単純群論の基礎をなすものであると同時に，将来の群論の発展にも通ずるものを含んでいると思われるのであるが，何分にもその内容は難解をきわめ，簡単に読める内容ではない。この解説が少しでも多くの人が，この論文に近ずく一助となれば幸いである。

§2 Aschbacherの定理

この節では，(A)の主定理を説明するが，慣用の記号は断わ

りなしに用いることがある。

有限群Gは

$$G = G', \qquad G/Z(G) = \text{単純}$$

のとき、準単純群(quasi-simple group)と呼ばれる。また

$$G = G', \qquad G/Z(G) = \text{単純群いくつかの直積}$$

のとき、Gは半単純群と呼ばれる。(semisimple group)
便宜上、単位群も準単純群や半単純群の仲間に入れる。
半単純群$G(\neq 1)$は、

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n$$

G_iは準単純

$$[G_i, G_j] = 1 \qquad (i \neq j)$$

の形に一意的に書ける。このとき、$G_1, G_2, \ldots, G_n$をGの成分(component)と云う。一般に有限群Gに極大半単純正規部分群が唯一つ存在する。それを$E(G)$で表わす:

$$E(G) = G\ \text{の最大の半単純正規部分群}$$

以後、$I(G)$によってGのinvolutions全体の集合を表わす:

$$I(G) = \{ t \in G \mid t^2 = 1,\ t \neq 1 \}$$

さて、偶数位数の群Gは、

$$E\left(C_G(t) / O(C_G(t)) \right) \neq 1 \quad \text{for } {}^{\exists} t \in I(G)$$

なる条件をみたすとき，成分型の群（group of component type）と呼ばれる。ここで基本的な問題は，$O(G)=1$ のとき次の命題(B)が成り立つかどうかと云うことである：

$$\text{(B)} \qquad E\left(C_G(t)/O(C_G(t))\right) = E(C_G(t))\,O(C_G(t))/O(C_G(t))$$

$$\text{for } \forall t \in I(G)$$

次の記号を用いるのが便利である。$E(X/O(X))$ の X への完全逆像を $O_{2'E}(X)$ と書く：

$$O_{2'E}(X) = E(X \bmod O(X))$$

この記号を用いれば，(B)は

$$\text{(B)} \qquad O_{2'E}(C(t)) = E(C(t))\,O(C(t)) \qquad \forall t \in I(G)$$

となる。この(B)が，いわゆる(B)-conjectureの実質的内容である。

さて，(A)の主定理は，次の二つの定理に分けて理解するのが良い。

定理1. Gは (B)をみたす偶数位数の群とする。このとき次の(i),(ii)をみたすGの準単純部分群Aが存在する：

(i) $|C(A)| = \text{even}$

(ii) $I(C(A)) \ni t \Longrightarrow E(C(t)) \triangleright A$

定理1の(i),(ii)をみたす準単純部分群Aが，さらに

(iii) $[A, A^g] \neq 1$ $({}^{\forall} g \in G)$

をみたすとき，AをGの標準部分群と云う。標準部分群のこの定義が，(A)による
(standard subgroup)

A standard in G

$\Longleftrightarrow$ C(A)はGにおいてtightly embedded
$N(C(A)) = N(A)$
$[A, A^g] \neq 1$ ${}^{\forall} g \in G$

と同値であることは，全く見易い。さて，定理1の(i)，(ii)をみたす準単純部分群Aが(iii)をみたさないとき何が起るか？それに答えるのが，次の定理2である。

定理2 Aを定理1の(i)，(ii)をみたすGの準単純部分群とする。 $[A, A^g] = 1$ $({}^{\exists} g \in G)$ ならば，$E(G) \rhd A$であるかあるいは，$m(A) = 1$で$[A, A^g] = 1$なるA^gはunique，しかも$|A \cap A^g| = \text{even}$である。

これら2つの定理が，(A)の主定理の本質的内容である。さらに，R. Footeは定理2をさらに押し進めて，定理2において$E(G) \not\rhd A$ならば，

$\langle A^G \rangle \simeq Sp_4(q),\ U_4(q),\ G_2(q) \qquad q = \mathrm{odd}$
であることを示している。したがって，定理1，2は R. Foote の結果とともに，有限単純群Gは少数の例外（$Sp_4(q)$ など）を除いて標準部分群をもつことを示している。（ただし (B) が成り立つことを仮定しての上である）
以下で，定理1の証明と定理2の概略を解説する。定理1の証明は，むしろ elementary であり難しくはないが，定理2の内容は深くその証明は極めて難解である。このことは，定理1，2の主張をみるだけでも想像するに難くはないであろうと思われる。

§3　Gorenstein-Walter の定理

以下では，$E(X)$ の成分を X の成分と呼ぶことにする。ここでは，成分の取扱いに基本的な事柄を述べる。まず，次の簡単な命題は，大切である。

(1)　L を X の成分，Y を X の任意の部分群とするとき $[Y, L] = 1$ または $[Y, L] \supseteq L$ である，

(2)　$t \in I(X)$，$L =$ a component of X，$L \neq L^t$ とし，$\Delta = \{xx^t \mid x \in L\}$ とおく。このとき，次の (α)～(ε) が成り立つ：

(α)　$\Delta = C_{LL^t}(t)'$ で Δ は準単純。

(β) $Y \subseteq X$, $[Y, \Delta]=1 \Longrightarrow [N_Y(L), LL^t]=1$

(γ) $LL^t - Z(LL^t)\Delta \ni x \Longrightarrow \langle x, \Delta\rangle = LL^t$

(δ) $\Delta \subseteq Y \subseteq LL^t$, $Y = Y' \Longrightarrow Y = \Delta$ or LL^t

定理 (Gorenstein-Walter)

$I(X) \ni t$, L = a component of X, K = a component of $C(t)$ とするとき，次の4つのいずれかが起る：

(i) $K = L$

(ii) $[K, L] = 1$

(iii) $L \neq L^t$ かつ $K = C_{LL^t}(t)'$

(iv) $K \subset L = [L, t]$

系 $E(C(t)) \subseteq O_{2'E}(X)$.

上の命題(1), (2)の証明はやさしい。Gorenstein-Walterの定理には，有限群のautomorphism groupに関する Glaubermanの或る定理が用いられる。

注意 $L(X) = O_{2'E}(X)^{(\infty)}$ ($= O_{2'E}(X)$の交換子群列の最終項) とおくとき，$L(X)$は

$L(X) = L_1 L_2 \cdots L_n$

$L_i/O(L_i)$ = 準単純

$L_i' = L_i$, $[L_i, L_j] \subseteq O(L_i) \cap O(L_j)$ $(i \neq j)$

の形に一意的に書ける。この L_i を X の 2-成分と呼ぶ。

上の G-W の定理は、X の 2-成分と $C(t)$ の 2-成分の関係に一般化され、系も $L(C(t)) \subseteq L(X)$ の形に一般化される。これが、本来 G-W の定理と呼ばれているものである。しかしこの解説では、実質的に 2-成分を用いることはないので、上の定理を G-W の定理と呼ぶことにする。

§4 定理1の証明.

この節では、G を §2 の命題(B)が成り立つ群とする。

・$\mathcal{L}$ = $C(t)$ の成分全体 $(t \in I(G))$

$\mathcal{L}^*$ = $\mathcal{L}$ の元で位数最大のもの全体.

とおく。まず次の命題(3)は (B) と G-W の定理の簡単な応用である：

(3) $\mathcal{L} \ni A \lhd E(C(t))$,

$I(C(t) \cap C(A)) \ni a \Longrightarrow A \lhd E(C(a))$.

以下、$\mathcal{L}^*$ のある元が定理1の(i), (ii)をみたすことを示す。

Lemma 1 $\mathcal{L}^* \ni A \lhd E(C(t))$ $(t \in I(G))$, $I(C(t) \cap C(A))$

$\ni a$ とする。 $E(C(a)) \ntriangleright A$ ならば

(i) $\mathcal{L}^* \ni {}^\exists K \lhd E(C(a))$ s.t. $K \neq K^t$ and
$A = C_{KK^t}(t)'$

(ii) $m(C(t) \cap C(A)) > 2 \Rightarrow$
${}^\exists U = 4\text{-gp}$ s.t. $E(C(u)) \rhd KK^t \quad {}^\forall u \in U^\#$.

Lemma 2. $\mathcal{L}^* \ni A$ が
(#) $C(A) \supseteq {}^\exists U = 4\text{-gp}$ s.t. $E(C(u)) \rhd A \quad {}^\forall u \in U^\#$
をみたすとする。このとき
(i) $a \in I(C(U) \cap C(A)) \Rightarrow A \lhd E(C(a))$
(ii) $I(C(A)) \ni a$, $E(C(a)) \ntriangleright A \Rightarrow a \notin O^2(C(A))$

Lemma 3 $\mathcal{L}^* \ni A$ が (#) をみたすとする。
$[A, A^g] = 1 \ {}^\exists g \in G \Rightarrow$ A は定理1の(i), (ii)をみたす.

定理1の証明.
背理法による。したがって次の(*) を仮定する:
(*) $\mathcal{L}^*$ のどの元も定理1の(ii)をみたさない
($\mathcal{L}^*$ の元は、定理1の(i)をみたすことに注意)
$A \in \mathcal{L}^*$ をとる。
Step 1. ${}^\exists t, a \in I(G)$ s.t. $[t, a] = [t, A] = [a, A] = 1$
and $E(C(t)) \rhd A$, $E(C(a)) \ntriangleright A$

∵) (*) により $\exists u, v \in I(C(A))$ s.t. $E(C(u)) \triangleright A$ and $E(C(v)) \not\triangleright A$。このとき, $u \sim v$ in $C(A)$。Involution のよく知られた性質により

$\exists z \in I(C(A))$ s.t. $[z, u] = [z, v] = 1$.

$E(C(z)) \triangleright A$ ならば $t = z$, $a = v$ とすればよい。また $E(C(z)) \not\triangleright A$ ならば $t = u$, $a = z$ とすればよい。

Step 2. Lemma 1 (i) により

$\exists K = E(C(a))$ の成分 s.t. $K \neq K^t$, $A = C_{KK^t}(t)'$.

このとき, $K \in \mathcal{L}^*$, $a \notin K^{\cup}K^t$ で K は(*)をみたさない, また $m(C(a) \cap C(K)) \geqq 2$。

∵) A は K の homomorphic image だから $K \in \mathcal{L}^*$.

$a \in K^{\cup}K^t$ なら, $a \in Z(K)$。このとき, K が定理1の (ii) をみたさなければ, K に対して Lemma 1 (i) を apply して矛盾を得る。K が(*)をみたせば, Lemma 3 により K が定理1の (ii) をみたすことになる。最後に $\langle a \rangle \times K^t \subseteq C(t) \cap C(K)$ より $m(C(a) \cap C(K)) \geqq 2$ となる。

Step 3. $m(K) = 1$

∵) $C(K) \cap C(a) \supseteq U = 4$-gp をとる。

Lemma 1 の (ii) と (*) により

$^{\exists} u \in U^{\#}$ s.t $E(C(u)) \not\trianglerighteq K$, $L \neq L^u$, $K = C_{LL^u}(u)'$ である。$L \in \mathcal{L}^*$ は明らか。もし $m(C(K) \cap C(a)) > 2$ ならば Lemma 1 の(ii)により L は(#)をみたし、Lemma 3* により L は定理1の(ii)をみたすこととなる。

$\therefore \quad m(C(K) \cap C(a)) = 2$.

$\langle a \rangle \times K^t \subseteq C(K) \cap C(a)$ だから、$1 = m(K^t) = m(K)$。

Step 4. $I(Z(K)) \ni b$ とする。$E(C(b)) \trianglerighteq K$ ならば、K に Lemma 1 (i) を apply して矛盾を得るから、$E(C(b)) \not\trianglerighteq K$ である。再び Lemma 1 (ii) を用いて

$^{\exists} L = E(C(b))$ の成分 s.t $L \neq L^a$, $K = C_{LL^a}(a)'$

また $\langle a, b^t \rangle \subseteq C(a) \cap C(K)$, $m(C(a) \cap C(K)) = 2$ より $b \in \langle a, b^t \rangle$. $\quad \therefore \quad a = bb^t$.

ところで (3) により $E(C(b)) \supseteq KK^t$ だから

$E(C(b)) \supseteq KK^t \ni bb^t \ni a$

$\therefore \quad L = L^a$

となり矛盾。（証明終）

上の Lemma 1〜3 および定理2については，Aschbacher の原論文 (A) を参照されたい。なお，(A) の主定理の重要性については，鈴木通夫 氏による雑誌"数学" 1974 の解説および五味健作氏による 1975 年代数学シンポジウム (於札幌) の報告を参照されたい。