数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 67-71

標数2 階数2 のLie 型の群を成分とする群について

東大　教養　五味健作
筑波大　数系　宮本　泉
東大理大学院　山田裕理

M. Aschbacher の画期的な研究 [1] 以来、成分型の群の研究は目ざましい勢いで進展を続け、今や終りに近づきづつある。この小文ではその現状を概観し、それに関連して我々三人の研究について報告する。用語、問題の背景などについては「成分型の群について」、1975年代数学シンポジウム（群論および代数幾何学）記録、19－31、を参照していただきたい。

成分型の群に関しての目標は次の予想を証明することである。

(※) 有限群 G の involution t の中心化群 C(t) の 2 成分 L で $L/Z^{*}(L)$ が既知の単純群に同型なものがあれば、L の正規包 $\langle L^G \rangle$ の組成因子はすべて既知の単純群である。

これが証明されれば単純群分類の「半分」が終ることになり、有限単純群論に一大エポックを画することになる。

ここで既知の単純群を次の4系列に分ける。

$\mathcal{A}$: 交代群

$\mathcal{L}$: 標数2のLie 型 の群

$\mathcal{L}'$: 奇標数のLie 型の群

$\mathcal{S}$: 散在群 (sporadic groups)

(※) に関してこれまで次のことが知られている。

<u>Unbalanced group theorem</u> 有限群G のあるinvolution t に対して $O(C_G(t)) \not\leq O(G)$ ならば、G の2成分L で $L/Z^*(L) \in \mathcal{L}' \cup \mathcal{A} \cup \{L_3(4), He\}$ なるものがある。

この大定理は最近Aschbacher、Thompson、R. Solomonをはじめとする多くの人々の努力により証明された模様である。 これによりThompsonのB-conjectureが肯定的に解決される。

<u>B-conjecture(theorem)</u> 有限群Gとその任意の2-部分群Tに対して $B(C(T)) \leq B(G)$ 。

B-conjectureのもとで次の基本定理が成立する。

Theorem (Aschbacher、Foote) (※) を証明するにはLが標準部分群の場合を考えればよい。

Lが標準部分群ならば$K=C(L)$ は tightly embedded subgroup になる。 次の Aschbacher の定理は、より一般的な場合を扱っている。

Theorem (Aschbacher) 有限群Gが tightly embedded subgroup を持ち、KのSylow 2 群は一般四元数群、$F^*(G)$ が単純なら、$F^*(G) \in \mathcal{L}'$。

次に

Theorem (Aschbacher、Seitz) 有限群Gが標準部分群Lを持ち、$L/Z(L)$ は既知の群、かつ$C(L)$ の 2-rankが 2 以上ならば $\langle L^G\rangle/Z(\langle L^G\rangle)$ も既知の群。

以上により、結局次の場合を考えればよい。

(1) LはGの標準部分群

(2) $\tilde{L}=L/Z(L)$ は既知の単純群

(3) $C(L)$ のSylow 2 群は巡回群

(1)+(3) は次のことと同値になる。

Gのあるinvolution t に対して、LはC(t) の正規準単純部分群であり、$C(L) \cap C(t)$ のSylow 2 群は巡回群。

この場合にもすでに多くのことが知られている。

(1) $\tilde{L} \in \mathcal{A}$：Solomon、Harris 等が解決した。

(2) $\tilde{L} \in \mathcal{L}'$：Walter 等が少くとも標数 $\neq 3$ の場合を解決しているようだ。

(3) $\tilde{L} \in \mathcal{S}$：Finkelstein、Solomon 等の人々がほとんどの場合を扱ったようだ。

(4) $\tilde{L} \in \mathcal{L}$： $\tilde{L}$ のBN- pair rank をkで表わす。 さらにZ(L) の位数は奇数とする。(そうでない場合はわずかしかない)。 $k=1$ の場合はGriess、Mason、Seitz が解決した。 $k \geq 2$ の場合はSeitz 等の人々が研究している。 現在のところSeitz は次のことを主張している。「$\tilde{L} = Sp_4(2^n)$ 、$U_4(2^n)$ 、$U_5(2^n)$ 、$Sp_6(2)$、$U_6(2)$ 、$O_8^{\pm}(2)$ の場合が解決されれば、$k \geq 3$のときにはLを含む部分群G_0で$G_0/Z(G_0) \in \mathcal{L}$ または$G_0/Z(G_0) \cong L \times L$なるものを構成することができる。」($G_0$がGの正規部分群であることを証明しなければならないが、それはまだできていないようだ。) したがって上の例外的な場合を処理することが必用になる。 ここで報告するのは$\tilde{L} \cong Sp_4(2^n)$の場合である。

Theorem (五味、部分的に山田) 有限群G が標準部分群Lを持ち、$L/Z(L) \cong Sp_4(2^n)$ 、かつC(L) のSylow2群は巡回群であるとする。 L の正規

包をX で表わす。 このとき次のいずれかが成立する。

(1) $X/0(X) \cong Sp_4(2^n)$

(2) $X/Z(X) \cong U_4(2^n)$ 、$U_5(2^n)$ 、$L_4(2^n)$ 、$L_5(2^n)$ 、
$Sp_4(2^{2n})$ 、$Sp_4(2^n) \times Sp_4(2^n)$

この定理の証明に使われたのと同様の方法を使って、宮本泉が$\tilde{L} = U_4(2^n)$ の場合を研究している。

以上の他にはrank が2の例外型の群$G_2(2^n)$ 、$^3D_4(2^n)$ 、$^2F_4(2^n)$ 、およびTits の群$^2F_4(2)'$が残されているが、山田裕理、Assa が研究している。

〔1〕Acsbacher,On finite groups of component type, Illinois J。,
1975.