数理解析研究所講究録
第 277 巻 1976 年 72-78

Fixed Point が $\{2,3\}'$-群であるような素数位数の自己同型をもつ群。

北大 大学院　　宮本 雅彦

Thompson による Frobenius 予想の解決 [9] 以来，以下の予想があります。

予想 "α を位数 s（素数）の s'-群 G の自己同型群とします。もし $C_G(\alpha)$ が巾零なら，G は可解。"

ここでは $C_G(\alpha)$ に条件を付けた以下の定理を示します。

定理 1 "α を位数 s の s'-群 G の自己同型群とします。もし $C_G(\alpha)$ が $\{2,3,s\}'$-群なら，G は可解。"

上の予想に対して，まず M.J. Collins [2] が，ほぼ $C_G(\alpha) \cong \mathbb{Z}_q$（$q$ は p と異なる素数）の場合を示し，続いて B. Rickman [7] が $C_G(\alpha)$ が cyclic r-群（r は p と異なる5以上の素数）の場合に示しました。ここではそれの拡張になります。奇数群の可解性は Feit-Thompson [3]

によって証明されているので，定理1の $C_G(\alpha)$ は可解です。定理の証明は fusion が中心であり，そこで以下の定理が重要です。

定理2. "G を有限群，そして S を G の Sylow 2-群とします。もし G が S_4-free で $Z(S) \triangleleft N_G(J(S))$ と仮定します。このとき G は $Z(S)$ を strongly closed abelian subgroup in S with respect to G としてもつ。"

最近 Thompson [10], Hauberman 等によって G が単純で S_4-free だけで上の結果が出ることを示したそうです。

§1. 予備の補題と定義。

$Syl_q(G)$ は G の Sylow q-群全体の集合，そして $Syl_q\langle\alpha\rangle(G)$ は G の $\langle\alpha\rangle$-invariant な Sylow q-群全体の集合を表わすとします。

補題1.（Schult）. V を有限群 G の位数 p の自己同型群とします。ただし p は素数で $(G, 2p) = 1$。K を標数が $|GV|$ と素な体とし，A を faithful な KGV-module とします。もし $C_A(V) = 0$ なら，このとき $[V, G] = 1$。

証明。（[8]の定理3.1を見よ。）

補題2。（Thompson）

Vを有限群Gの位数p（素数）の自己同型群とします。もし $C_G(V)=1$ なら Gは 巾零。

証明。（[9]の主定理を見よ）。

補題3。（Glauberman）

Gを有限群，pを奇素数，PをGの Sylow p-部分群，として Qを $Z(P)$の部分群とします。もし $Q \lhd N_G(J(P))$ で $p-1 \nmid |N_G(Q):C_G(Q)|$ とすると Qは weakly closed in P with respect to G.

証明。（[4]の系3を見よ。）

補題4。（Glauberman）

Sを有限群Gの Sylow 2-群とします。もし Gが S_4-free で $C_G(O_2(G)) \subseteq O_2(G)$とすると，

$G=\langle C_G(Z(S)),\ N_G(J(S))\rangle$.

証明。（[5]の系10を見よ。）

補題5。（Goldschmidt）

Gを 有限単純群（non-abelian）とする。もし Gが strongly closed abelian 2-subgroup をもつならば，Gは以下の群の一つと同型となる。

a) Bender群，　b) $L_2(q)$ $q \equiv 3,5 \pmod 8$）

又は Janko-Ree type の群。

証明。（[6] の定理 A を見よ。）

ここで G が可解群のときの構造を考える。

補題 6。

もし 可解群 G が 定理 1 の条件を満たす素数位数の自己同型群 V をもつとする。このとき $G = O_{q',q}(G)C_G(V)$ for $\forall q \notin \pi(C_G(V))$。

証明。 補題 1 と 補題 2 より 容易に出てくる。

§2. 定理 2 の証明。

Alperin [1] の定理 5.2 より $Z(S)$ が weakly closed であること，strongly closed であること，$N_G(Z(S))$ が 2-fusion を controls すること，これらすべて同値です。ここでは $Z(S)$ が weakly closed なることを示しましょう。正しくないと仮定します。Alperin [1] より，S の部分群 H で $Z(S) \trianglelefteq H$ で $Z(S) \ntrianglelefteq N_G(H)$ となるものがあります。これらの中で 以下を満たす H を 選びます。

i) $|N_S(H)|$ を 最大にとる。 そして，

ii) $|H|$ を i) を満たす中で最大にとる。

この H の極大性より，$N_S(H) \in Syl_2(N_G(H))$ や，$N_G(H)$ が 2-constrained となることがわかります。ここで補題 4 より

$N_G(H) = \langle C_{N_G(H)}(Z(N_S(H))),\ N_{N_G(H)}(J(N_S(H))) \rangle$ を得ます。Hの極大性より，$N_S(H) = S$ を得ます。しかし これは $N_G(H) = \langle C_{N_G(H)}(Z(S)),\ N_{N_G(H)}(J(S)) \rangle \trianglerighteq Z(S)$ となって，$N_G(H) \not\trianglerighteq Z(S)$ に矛盾します。

これで 定理Aの証明終り。

§3. 定理1の証明.

背理法によります。Gを最小反例とします。このとき Gは単純となります。とくに Gの local-部分群はすべて可解となります。今SをGの Sylow 2-群，QをGの Sylow 3-部分群とします。

(1). $N_G(J(S)) \trianglerighteq Z(S)$。

$$N_G(J(Q)) \trianglerighteq Z(Q),\quad N_G(Z(Q)) = C_G(Z(Q))C_{N_G(Q)}(\alpha)。$$

証明. これは 補題5より出ます。

それゆえ，$2 \nmid |N_G(Z(Q)) : C_G(Z(Q))|$. ゆえに 補題3によって 3-fusionは $N_G(Z(Q))$ が controls する。しかし，$|C_G(\alpha)|$は奇数なので GはS_3-free となる。とくに Gは S_4-free。又 (1)と 定理2を合わせて，Gが S_4-free なので，

(2). $Z(S)$ は strongly closed subgroup。

一方 Gは 単純群なので，補題5より，Gは

(3). Bender群, $L_2(q)$, 又は J-R type の群のどれか一つと同型となる。しかし よく知られているように、これらの群は 定理1の条件を満たすような自己同型群をもっていない。これは矛盾である。

これで 定理1の証明終り。

参考文献

[1]. J. Alperin, 'Sylow intersections and fusion,' J. Algebra 6 (1967), 222-41.

[2]. M. J. Collins, 'Finite Groups admitting almost fixed-Point-free automorphisms,' 'Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXI,' Amer. Math. Soc. (Providence, Rhode Island, 1971).

[3]. W. Feit and J. G. Thompson, 'Solvability of groups of odd order,' Pacific J. Math. 13 (1963), 775-1029.

[4]. G. Glauberman, 'A sufficient condition for p-stability,' Proc. London, Math. Soc. 25 (1972), 253~87.

[5]. ______________, 'Weakly closed elements of Sylow subgroups,' Math. Z. 107 (1968), 1-29.

[6]. D. M. Goldschmidt, '2-Fusion in finite groups,' Ann. Math. Vol. 99 (1974), 70-117.

[7]. B. Rickman, 'Groups admitting an automorphism of prime order fixing a cyclic subgroup of prime power order,' Quart. J. Math. Oxford (2), 26 (1975), 47-59.

[8]. E. Shult, 'On groups admitting fixed point free operator groups,' Ill. J. Math. 9 (1965), 701-20.

[9]. J.G. Thompson, 'Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sc. 45 (1959), 578~881.

[10]. J.G. Thompson, 'Simple Groups of Order Prime to 3,' to appear.