

## 等質空間に対する淡中型双対定理

京大 理 辰馬伸考

局所コンパクト群に対する淡中型双対定理の拡張として、岩塚-杉浦両氏は [2] に於いて、等質空間の“表現”を定義し、等質空間とその表現の空間の間の双対性の概念を定め、コンパクト Lie 群の等質空間について、その双対性の成立する事を証明して居る。

本文では、一般の局所コンパクト群の等質空間に対して、同じ型の双対性を考える。群の場合淡中型双対定理が常に成立したのに対し、等質空間のそれは、空間にある条件がある時にのみ成立する。成立する為の必要十分条件はまだ求まって居ないが、本文では、成立する為のいくつかの必要条件と、十分条件を与える。それらの条件の一つ、“等質空間の点を分離する不変ベクトルの族がある”、はたとえば Lie 群の等質空間について、双対定理が成立する為の必要十分条件を与えるものである。

又ニ此ノ條件ハ、コンパクト群ノ等質空間トカ、群自身  
 を等質空間トみなす場合は必然的に満されるモノデ、その意  
 味カ、此ノ結果ハ従来得ラれて居る所ノ淡中型双対定理ノ  
 拡張であるとも云える。

§1. 等質空間ノ表現.  $G$  を局所コンパクト群、 $H$   
 をその閉部分群とし、 $X (= H \backslash G)$  をその等質空間を表わす。  
 $G$  から  $X$  の上への canonical map による  $G$  の元  $g$  の像を  $\hat{g}$   
 と書く。  $g$  は  $X$  の上に、 $X \ni x \rightarrow x \cdot g \in X$  により作用し  
 て居る。  $G$  の単位元を  $e$  とする。

定義1.  $X$  の表現  $\{\omega, \varphi\}$  ( $\varphi$  と略記) とは、 $G$  の  
 ユニタリ表現  $\omega = \{\mathcal{U}^\omega, T_g^\omega\}$  と、 $X$  から  $\omega$  の表現空間  $\mathcal{U}^\omega$   
 への写像  $\varphi: x \rightarrow \varphi(x)$  の組で、表現作用素  $T_g^\omega$  について、

$$(1) \quad \varphi(x \cdot g) = T_{g^{-1}}^\omega(\varphi(x)),$$

を満すものを云う。

$X$  の表現  $\varphi$  が与えられた時、 $\forall h \in H$  に対して、(1) より

$$T_h^\omega(\varphi(\hat{e})) = \varphi(\hat{e} \cdot h^{-1}) = \varphi(\hat{e})$$

であるから、 $\varphi(\hat{e})$  は  $H$ -不変ベクトルである。

逆に、 $\mathcal{U}^\omega$  中に  $H$ -不変ベクトル  $v$  が与えられた時に、

$\varphi(\hat{g}) \equiv T_{g^{-1}}^\omega v$ , によって  $\varphi$  を定義すると、 $\{\omega, \varphi\}$  の組は  
 定義1の  $X$  の表現となる。すなわち、 $X$  の表現を与える事は、  
 $G$  のユニタリ表現  $\omega = \{\mathcal{U}^\omega, T_g^\omega\}$  と、 $\mathcal{U}^\omega$  中の  $H$ -不変ベクトル

ル $V$ の組を与える事に他ならない。此の意味から、以下 $X$ の表現は、 $\varphi \equiv (\omega, \nu)$  と云つた形に表示し、考えるのに便利な方を用いる事とする。更に、次の記号を用いる。

$\mathcal{R} (\equiv \mathcal{R}(X)) \equiv (X \text{ の表現 } \varphi \text{ の全体の集合})$ 。

$\mathcal{G}_0^\omega \equiv \{ \nu \in \mathcal{G}^\omega \mid T_h^\omega \nu = \nu, \forall h \in H \}$ 。

定義 2.  $\varphi_j \equiv (\omega_j, \nu_j) \in \mathcal{R} \quad (j=1,2)$  に対し、

1)  $\varphi_1 \xrightarrow{\Pi} \varphi_2$ , とは、 $\mathcal{G}^{\omega_1}$  から  $\mathcal{G}^{\omega_2}$  の上へのユニタリ写像  $\Pi$  によつて、 $G$  の表現  $\omega_1$  と  $\omega_2$  が同値であり、しかも、  
 $\Pi \nu_1 = \nu_2$ , とする事を云う。

2)  $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \equiv (\omega_1 \oplus \omega_2, \nu_1 \oplus \nu_2)$ , (直和)

3)  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \equiv (\omega_1 \otimes \omega_2, \nu_1 \otimes \nu_2)$ , (テンソル積)

$\Rightarrow$  で、右辺の  $\oplus, \otimes$  は夫々  $G$  の表現としての直和及びテンソル積を示す。 ┌

定義 2 より直ちに次の補題 3 が得られる。

補題 3.  $\forall x \in X, \quad \forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{R}$  に対して、

1)  $\varphi_1 \xrightarrow{\Pi} \varphi_2 \Rightarrow \Pi(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$ ,

2)  $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x)$ ,

3)  $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \otimes \varphi_2(x)$ ,

4)  $\|\varphi(x)\| = \|\varphi(\varepsilon)\|$ . └

定義 4.  $\mathcal{R}$  の 表現  $u$  とは、 $\mathcal{R}$  の各元  $\varphi \equiv (\omega, \nu)$  で夫々  $\mathcal{G}^\omega$  に値  $u(\varphi)$  をとる  $\mathcal{R}$  上のベクトル値函数であつて、

$$1) \quad \varphi_1 \sim \varphi_2 \implies \int (u(\varphi_1)) = u(\varphi_2),$$

$$2) \quad u(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = u(\varphi_1) \oplus u(\varphi_2),$$

$$3) \quad u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = u(\varphi_1) \otimes u(\varphi_2),$$

$$4) \quad \exists M < \infty \text{ s.t. } \|u(\varphi)\| \leq M \|\varphi(\hat{e})\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R},$$

が  $\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \mathcal{R}$  について成立するものを云う。  $\lrcorner$

補題3から,  $\forall x \in X$  に対して,  $\mathcal{R} \ni \varphi \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{G}^\omega$  とする  $\mathcal{R}$  上のベクトル値関数が, 定義4で与えた  $\mathcal{R}$  の表現となつて居る事は明らかであるが, 逆に次の命題を考えよう。

命題 [岩堀-杉浦の双対定理]  $\mathcal{R}$  の任意の表現  $u$  に対して,  $X$  の元  $x$  が一意的に定まつて,

$$u(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}. \quad \lrcorner$$

以下簡単の爲に此の命題を  $(G, H)$  に対する  $I.S$ -duality と呼ぶ。本又で我々の取上げるのは, 次の問題である。

問題 どの様な,  $G$  とその閉部分群  $H$  の pair に対して,  $I.S$ -duality が成立するか?  $\lrcorner$

以下に, 此の問題に対する既知の結果を, 二, 三, 例示する。

例5. [2] では,  $G$  がコンパクト Lie 群の時, 任意の  $H$  で,  $I.S$ -duality の成立する事を示している。  $\lrcorner$

例6.  $H$  が正規部分群の時,  $(G, H)$  に対する  $I.S$ -duality は, 商群  $H \setminus G$  に対する淡中型双対定理に他ならない。

例7.  $G$  を  $SL(2, \mathbb{C})$ ,  $H$  を上三角行列より成る  $G$  の

閉部分群とする。この時、 $G$  の既約ユニタリ表現は、 $H$  に制限しても、 $H$  の表現として又既約である。すなわち、 $H$ -不変ベクトルをもつ  $G$  の既約ユニタリ表現は、trivial 表現のみであり、従って  $H$ -不変ベクトルは又  $G$ -不変で、 $H$  を分離出来ない。つまり  $\mathcal{R}(X)$  の元は trivial なものしかなく、明らかにこの場合は、I.S.-duality は成立しない。  $\square$

5.2. 主結果  $G$  のユニタリ表現  $\omega$  の表現空間  $\mathcal{G}_\omega$  のベクトル  $v$  に対して、 $G$  の閉部分群  $Hv$  を次の様に定める。

$$Hv \equiv \{g \in G \mid T_g^\omega v = v\}$$

$H$  の trivial 表現  $\mathbb{1}_H$  を、 $G$  に誘導した表現を  $\sigma \equiv \text{Ind}_{HTG}^G \mathbb{1}_H$  で示す。 $\mathcal{G}_\sigma$  の元は  $X$  上の函数として実現されるが、canonical map の逆像で、 $G$  上の函数と見ると、 $G$  の  $H$ -double cosets 上で同じ値をとる函数、即ち  $H \backslash G / H$  上の函数と考えられる。

$X$  上の擬不変測度  $d\tilde{g}$  の測度  $\sigma$  は、 $G$  上での逆像が不変測度で測度  $\sigma$  である事と同値である。更に  $G$  上の不変測度  $dg$  は、 $d\tilde{g}$  と  $dg$  は互に絶対連続である。従って、 $\forall f \in \mathcal{G}_\sigma$  に対し、

$$f^*(\tilde{g}) \equiv \overline{f(\tilde{g}^{-1})} \quad \text{よって、} X \text{ 上の } H\text{-不変可測函数 } f^* \text{ を定義する事が出来る。}$$

同様  $X$  中の  $H$ -不変可測集合  $E$  に対して、 $E^\perp \equiv \{ \tilde{g} \mid \tilde{g}^{-1} \in E \}$  と定義すれば、又  $H$ -不変可測である。特に  $E = E^\perp$  の時、 $E$  を対称であると言う。

以下、pair  $(G, H)$  に対する幾つかの条件をあげる。

$$(P-1) \quad H = \bigcap_{v \in \mathcal{G}_0, \omega \in \Omega} H_v .$$

( $\Omega$  は  $G$  のユニタリ表現の全体を示す.)

(P-2)  $H$ -不変な近傍カラなる基本近傍系を持つ  $x \in X$  がある.

$$(P-3) \quad H = \bigcap_{f \in \mathcal{G}_0} H_f .$$

更に別に, 補助的條件として,

(A-1)  $X$  中に  $H$ -不変な相対コンパクト閉集合がある.

(A-1')  $X$  中に  $H$ -不変な<sup>(内積)</sup>正有限測度の可測集合がある.

(A-2)  $X$  は局所連結.

(A-3)  $H$  中に  $G$  の正規閉部分群  $N$  がとれて,  $N \setminus H$  があるコンパクト集合により生成される.

条件 (A-1), (A-2), (A-3) の内の何れか一つが成立する事を (A) で示す.

本文での主結果は次の通りである.

### 主定理

$$\begin{array}{ccccccc} (P-1) + (A) & \implies & (P-2) & \implies & (\text{I.S-duality}) & \implies & (P-1) \\ & & & \implies & & \implies & \\ (P-1) + (A-1') & \implies & & \implies & (P-3) & \implies & \end{array}$$

矢印は, その左の命題が仮定されれば, その先の命題が結論される事を示す.

特に, 証明の途中で出て来る次の命題は, I.S-duality が成立する際の必要條件の一つとして, 特徴的である.

補題 9. pair  $(G, H)$  が (P-1) を満たすなら,  $X \equiv H \backslash G$  上には  $G$ -不変測度がある。 ┘

証明は後の § で示す。

§ 3. 証明の準備.

証明に用いる補題を準備する。

補題 10.  $G$  のユニタリ表現  $\omega$  を 1 つ固定し,  $v_1, v_2 \in \mathcal{G}^\omega$  に対し,  $\varphi_j \equiv (\omega, v_j)$ , ( $j=1, 2$ ),  $\varphi_0 \equiv (\omega, a v_1 + b v_2)$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  で与えられる  $X$  の表現  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$  を考える。

この時,  $\mathbb{R}$  の任意の表現  $u$  について,

$$u(\varphi_0) = a u(\varphi_1) + b u(\varphi_2). \quad \text{┘}$$

証明.  $a \neq 0$  としよう。  $\mathcal{G}^{\omega \otimes \omega} \equiv \mathcal{G}^\omega \otimes \mathcal{G}^\omega$  の中で,  $V_1 \equiv \{v \otimes (\bar{b}/a)v \mid v \in \mathcal{G}^\omega\}$ ,  $V_2 \equiv \{(b/a)v \otimes (-v) \mid v \in \mathcal{G}^\omega\}$ , と置くと,  $\mathcal{G}^{\omega \otimes \omega} = V_1 \oplus V_2$  は,  $\omega \otimes \omega$  の直和分解であり, ベクトル  $w_1 \otimes w_2$  の  $V_1, V_2$  への分解成分は夫々,

$$\bar{a}(a w_1 + b w_2)(|a|^2 + |b|^2)^{-1}, \quad a(\bar{b} w_1 - \bar{a} w_2)(|a|^2 + |b|^2)^{-1}$$

である。  $v_1 \otimes v_2$  に適用し, 定義 4. 1), 2) より結果を得る。 ┘

補題 11.  $\mathbb{R}$  の表現  $u$  が,  $\varphi \equiv (\omega, v) \in \mathcal{R}$  でとる値は,

$\{T_g^\omega v \mid g \in G\}$  によって張られる  $\mathcal{G}^\omega$  の閉部分空間内に入る。 ┘

証明 問題の閉部分空間への  $\omega$  の制限を  $\omega_1$  とし,  $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$  と直和分解する。  $\varphi_1 \equiv (\omega_1, v)$ ,  $\varphi_2 \equiv (\omega_2, 0)$  とおくと,  $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$  であるから, 表現  $u$  の定義より,  $u(\varphi) = u(\varphi_1) \in \mathcal{G}^{\omega_1}$  ┘

補題 12. 定義 4. 4) の  $M$  は,  $M=1$  としよう。 ┘

証明 ある  $\varepsilon > 0$  と,  $\varphi \in \mathcal{R}$  に対し,  $\|u(\varphi)\| > (1+\varepsilon)\|\varphi(\hat{e})\|$  とすれば, 定義 4 3) により,  $u(\prod^m \varphi) = \prod^m (u(\varphi))$  となり,  
 $\|u(\prod^m \varphi)\| = \|u(\varphi)\|^m > (1+\varepsilon)^m \|\varphi(\hat{e})\|^m = (1+\varepsilon)^m \|\prod^m \varphi(\hat{e})\|$   
 これは, 共通の  $M < +\infty$  で, 定義 4 4) の成立する事に反す。

補題 10, 11, 12 により,  $\mathcal{R}$  の表現  $u$  が与えられた時, 各  $\omega$  に対して,  $\mathcal{G}_0^\omega$  から  $\mathcal{G}^\omega$  への有界線型作用素  $\Pi^\omega$  が定義され,  
 $\varphi \equiv (\omega, \nu) \in \mathcal{R}$  で  $u(\varphi) = \Pi^\omega \nu$  となる事が判った。

補題 13.  $X$  上の閉部分集合の族  $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$  が  $\bigcap F_\alpha = \{\hat{e}\}$  を満すとする。この時,  $X$  の任意のコンパクト部分集合  $C$  と,  $\hat{e}$  の任意の近傍  $V$  に対し,  $\mathcal{F}$  の有限部分集合  $\{F_j\}$  をとり,

$$C \cap \left(\bigcap_j F_j\right) \subset V \quad \text{とする事が出来る。}$$

証明.  $V$  を開集合としてよい。  $C - V$  はコンパクトであり,  $\bigcup_\alpha (F_\alpha)^c$  はその開族覆であるが, 有限族覆  $\bigcup_j (F_j)^c \supset C - V$  をとる事が出来, その族覆に対し,  $C \cap \left(\bigcap_j F_j\right) \subset V$  となる。

補題 14. pair  $(G, H)$  が (P-1) を満すとする。この時,  $H$  の任意のコンパクト部分集合  $K$  と,  $\hat{e}$  の  $X$  中の任意の近傍  $V$  に対し,  $V$  に入る  $\hat{e}$  の  $X$  中の近傍  $W$  がとれて,  $WK \subset W$ 。

証明. 各  $\nu \in \mathcal{G}_0^\omega$  と  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$E_{\varepsilon, \nu} \equiv \{g \in G \mid |\langle \nu, \nu \rangle - \langle T_g^\omega \nu, \nu \rangle| \leq \varepsilon\},$$

とおくと, 明らかに  $H E_{\varepsilon, \nu} H = E_{\varepsilon, \nu}$  であり,  $F_{\varepsilon, \nu} \equiv \tilde{E}_{\varepsilon, \nu}$  は  $X$  中の  $\hat{e}$  の  $(H\text{-不変})$  近傍である。更に (P-1) の仮定より,  $H = \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \nu \in \mathcal{G}_0^\omega}} F_{\varepsilon, \nu}$



であるから  $\{e\} = \bigcap_{\varepsilon, v} F_{\varepsilon, v}$ .  $\mathcal{F} \equiv \{F_{\varepsilon, v}\}$  と,  $V$  に入る  $e$  のコンパクト近傍  $V_0$  について,  $C \equiv V_0 \cdot K$  とおいて, 2.16 に 補題 13 を適用すると, 有限個の  $\{F_{\varepsilon_j, v_j}\}$  があつて,

$W \equiv V_0 K \cap (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}) \subset V_0$  となる. 所て  $W$  の定義により,  $WK \subset V_0 K$ , 及び,  $WK \subset WH \subset (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j})H \subset \bigcap_j (F_{\varepsilon_j, v_j}H) = \bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}$  であるから,  $WK \subset V_0 K \cap (\bigcap_j F_{\varepsilon_j, v_j}) \subset W$  となる.  $\square$

(補題 9 の証明) [4] p. 44. により,  $X$  上には  $G$ -不変測度が存在する事と,  $G, H$  双方の modular 函数の比  $\Delta_G(h)/\Delta_H(h) = 1$  ( $\forall h \in H$ ) である事は同値である. 従つて,  $X$  上には  $G$ -不変測度が存在せぬと仮定すれば,  $\exists h_0 \in H$  で,  $\Delta_G(h_0)/\Delta_H(h_0) > \delta$  となる. さて,  $X$  上の  $G$ -不変測度  $\mu$  は,  $G$  上の連続函数  $\psi$  により,  $(d\mu(\tilde{g}g_1)/d\mu(\tilde{g})) = \psi(g_1)/\psi(g)$  となる様にとれる. ([1] §2 Th. 2)

$G$  の中での近傍を,  $\forall g \in W$  で  $(\psi(e)/2) < \psi(g) < 2\psi(e)$  となる様にとり,  $V_0$  を  $V_0 \cup h_0^{-1}V_0 h_0 \subset W$  ととる.  $\{e, h_0, h_0^{-1}\}$  を補題 14 の  $K$  と思ひ,  $\tilde{V}_0$  を  $V$  と思へば, 適当な  $\tilde{e}$  の近傍  $W_2$  が  $\tilde{V}_0$  の中にとれて,  $W_2 h_0 = W_2$ . 特には  $W_2$  の  $G$  の中での逆像は  $HV_0$  に入る. 一方,

$$0 < \mu(W_2 h_0^{-1}) = \int_{W_2} d\mu(\tilde{g}h_0) = \int_{W_2} (\psi(g h_0)/\psi(g)) d\mu(\tilde{g}).$$

こゝで  $\tilde{g} \in W_2$  の代表元  $g$  を  $HV_0$  から取つたと思へば,

$$(\psi(g h_0)/\psi(g)) = (\psi(h_0 h_0^{-1} g)/\psi(g)) = (\psi(h_0 h_0^{-1} u)/\psi(u)) = \left( \frac{\Delta_G(h_0)}{\Delta_H(h_0)} \right) (\psi(h_0^{-1} u h_0)/\psi(u))$$

$$\geq 8((\chi(e)/2)/2\chi(e)) > 2 \quad (\text{但し } g \in H_u, u \in \mathcal{V}_0)$$

従つて上式に代入すると,  $\mu(W_2 h_0^{-1}) > 2 \int_{W_2} d\mu(\tilde{g}) = 2\mu(W_2) > 0$ .

これは  $W_2 h_0 = W_2$  に及ぶ。  $\square$

補題 15.  $G$  のユニタリ表現  $\omega$  に対して,  $\mathcal{C}_0^\omega$  の正規直交基底  $\{q_\alpha\}_\alpha$  を 1 つ固定する。  $\mathcal{C}_0^\omega \otimes \mathcal{C}_0^\sigma$  から  $\Sigma \otimes \mathcal{C}_0^\sigma$  への写像,

$$B_\omega ; \quad v \otimes f \longmapsto \{ \langle T_g^\omega v, q_\alpha \rangle f(\tilde{g}) \}_\alpha$$

は  $\omega \otimes \sigma$  から  $\Sigma \otimes \sigma$  の中への intertwining operator を与える。

特に,  $\omega = \sigma$  の場合の対応は次で与えられる。

$$B ; \quad f_1(\tilde{g}_1) f_2(\tilde{g}_2) \longmapsto \{ \langle T_{g_0}^\omega f_1, q_\alpha \rangle f_2(\tilde{g}) \}_\alpha \quad \square$$

証明. 有界性は上の形から, 又  $\mathcal{C}_0^\omega \otimes \mathcal{C}_0^\sigma \ni T_{g_0}^\omega v \otimes T_{g_0}^\sigma f$  は,  $B_\omega$  により,  $\{ \langle T_{g_0}^\omega v, q_\alpha \rangle f(\tilde{g}_0) (d\mu(\tilde{g}_0)/d\mu(\tilde{g}))^{1/2} \}$  に写される事より, 作用素の対応は明らかである。  $\square$

補題 16. 補題 12 の後の注意により,  $\mathcal{R}$  の表現  $u$  に対して与えられた  $\mathcal{C}_0^\sigma$  から  $\mathcal{C}_0^\sigma$  への有界線型作用素を  $\Pi^\sigma$  とする。この時,  $\forall f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}_0^\sigma$  について,

$$(*) \quad \langle T_g^\sigma(\Pi^\sigma f_1), f_2 \rangle (\Pi^\sigma f_3)(\tilde{g}) = (\Pi^\sigma(\langle T_{g_0}^\sigma f_1, f_2 \rangle f_3))(\tilde{g}), \quad a \in \tilde{g}_0$$

証明. 補題 15 の同値対応  $B$  を, 表現  $u$  の定義に適用する。

$$B(\Pi^\sigma f_1 \otimes \Pi^\sigma f_3) = \{ \langle T_g^\sigma \Pi^\sigma f_1, q_\alpha \rangle \Pi^\sigma f_3 \}_\alpha$$

$$= (\Sigma \otimes \Pi^\sigma) B(f_1 \otimes f_3) = \{ \Pi^\sigma(\langle T_{g_0}^\sigma f_1, q_\alpha \rangle f_3) \}_\alpha$$

$B$  が intertwining operator であるから, 左辺が等しく, 従つて右辺の各成分が等しいが,  $\{q_\alpha\}$  は任意にとれるから (\*) を得る。  $\square$

補題 17.  $\mu$  を  $X$  上の  $G$ -不変測度とする。  $f_1, f_2$  を  $H$ -不変な  $L^1_\mu(X)$  の元,  $k$  を  $H$ -不変な  $L^2_\mu(X)$  の元とすれば,

$$\langle T_g^\circ f_1, f_2 \rangle \equiv \int_X f_1(xg) f_2(x) d\mu, \quad \langle T_g^\circ k, f_2 \rangle \equiv \int_X k(xg) f_2(x) d\mu,$$

$$\langle T_g^\circ f_2, k \rangle \equiv \int_X f_2(xg) k(x) d\mu \text{ は } X \text{ 上の函数として定義され,}$$

$$\text{i) } f_2^* \in L^1_\mu(X) \text{ なら } \|\langle T_g^\circ f_1, f_2 \rangle\|_1 \leq \|f_2\|_1 \cdot \|f_2^*\|_1$$

$$\text{ii) } f_2^* \in L^1_\mu(X) \text{ なら } \|\langle T_g^\circ k, f_2 \rangle\|_2 \leq \|k\|_2 \cdot \|f_2^*\|_2^{1/2} \cdot \|f_2\|_1^{1/2}$$

$$\text{iii) } k^* \in L^2_\mu(X) \text{ なら } \|\langle T_g^\circ f_2, k \rangle\|_2 \leq \|f_2\|_1 \cdot \|k^*\|_2$$

(但しノルムは全て,  $X$  上の  $\mu$  による  $L^1, L^2$  等のノルム)  $\square$

証明. 全て同様の計算で示されるので, 一番複雑な ii) を示す。  $\langle T_g^\circ k, f_2 \rangle$  が  $X$  上の函数になる事は,  $\mu$  の  $G$ -不変性と,

$f_2$  の  $H$ -不変性から明らかである。さて  $\forall h \in L^2_\mu(X)$  に対し,

$$\begin{aligned} & \left| \int_X \langle T_g^\circ k, f_2 \rangle \overline{h(xg)} d\mu(x) \right| = \left| \int_X \left( \int_X k(xg) f_2(x) d\mu(x) \right) \overline{h(xg)} d\mu(g) \right| \\ & \leq \int_X \left( \int_X |k(x) f_2(xg^{-1})| d\mu(x) \right) |h(xg)| d\mu(g) = \int_X \int_X |k(x) f_2^*(gx^{-1})| d\mu(x) d\mu(g) \\ & \leq \int_X \left( \int_X |h(xg)|^2 |f_2^*(gx^{-1})| d\mu(g) \right) \cdot \int_X |f_2^*(gx^{-1})| d\mu(g) \cdot \int_X |k(x)| d\mu(x) \\ & = \|f_2^*\|_1^{1/2} \left( \int_X \int_X |h(xg)|^2 |f_2(xg^{-1})| d\mu(g) d\mu(x) \right)^{1/2} \left( \int_X |k(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ & = \|f_2^*\|_1^{1/2} \|k\|_2 \left( \int_X |h(xg)|^2 \left( \int_X |f_2(xg^{-1})| d\mu(x) \right) d\mu(g) \right)^{1/2} \\ & = \|f_2\|_1^{1/2} \|f_2^*\|_1^{1/2} \|k\|_2 \|h\|_2 \end{aligned}$$

$h$  の任意性から ii) 式が得られる。  $\square$

§4. 主定理の証明 (1). 先ず次の事に注意する。

$X$  上の  $H$ -不変集合  $\tilde{E}$  は canonical map による  $G$  の逆像をとると, ある  $G$  上の集合  $E$  によって  $H\tilde{E}H$  の形に書ける。

従つて、 $X$  の  $H$ -不変集合  $E_1, E_2$  に対して、夫々の逆像を  $HE_1, HE_2$  とすると、 $(HE_1)(HE_2) = H(E_1 \cdot E_2)$  は、 $E_1, E_2$  の選  
び方によらない。その  $X$  への像を  $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2$  と書く事にする。  
[4] p19 により、 $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2$  がコンパクトなら  $E_1, E_2$  も又コン  
パクトにとれる。従つて  $\widehat{E}_1 \cdot \widehat{E}_2$  及び  $\widehat{E}_1^{-1}$  (互参照) もコン  
パクトである。又補題 17(i) より、 $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2$  が有限測度を持つば  
 $\widehat{E}_1 \cdot \widehat{E}_2$  も又有限測度を持つ。此の事から、条件 (P-2) の  $X$   
は、その  $H$ -不変コンパクト近傍系  $\{V\}$  の代りに、 $\{V^{-1}V\}$  を考  
えれば、 $X = \widehat{X}$  であつたとしてよい事が判る。 従つて、

(P-3)  $\rightarrow$  (P-1) は明らか。 ┌

(I.S.-duality)  $\rightarrow$  (P-1). 今  $H \subseteq \bigcap_{v \in G_0, \omega \in \mathbb{R}^d} H_v$  とする。

即ち、 $g \in \bigcap_{v \in G_0, \omega \in \mathbb{R}^d} H_v$  且  $g \notin H$  をとると、 $\forall \varphi = (\omega, v) \in \mathbb{R}^d$ ,

$\varphi(\widehat{g}) = T_g^\omega(\varphi(\widehat{e})) = T_g^\omega v = v = \varphi(\widehat{e})$ 。一方  $g \notin H$  より、  
 $\widehat{g} \neq \widehat{e}$ 。此れは I.S.-duality の一意性に反す。 └

(P-2)  $\rightarrow$  (P-3). 先づ補題 9 の証明は、(P-2) を仮  
定すれば、補題 14 を至すに  $W_1$  の存在が云え、従つて  $X$  上  
の  $G$ -不変測度の存在が云える事に注意する。  $\widehat{X}$  の  $H$ -不変コン  
パクト近傍系  $\{W\}$  の特性函数  $\{\chi_W\}$  の族は  $G_0$  に入る。

(P-2) の仮定より、 $\{W\}$  は近傍系の基となるから、 $\forall g \notin H$  へ  
対し、 $g$  を含まない  $W$  をとれば、 $\chi_W \neq T_g^\omega \chi_W$ 、即ち  
 $H \chi_W \neq g$  であつて、(P-3) が結論される。 └

(P-1)+(A-1)  $\rightarrow$  (P-2). 補題14 同様  $\forall v \in \mathcal{G}_0^0$  と  $\varepsilon > 0$ ,

$$E_{\varepsilon, v}^0 \equiv \{g \in G \mid |\langle v, v \rangle - \langle T_g^0 v, v \rangle| < \varepsilon\}$$

を考えると, これは  $H$ -不変開集合であって, (P-1)の仮定より

$$H = \bigcap_{v, \varepsilon} E_{\varepsilon, v}^0 \quad \text{である.}$$

(A-1)で仮定する  $H$ -不変相対コンパクト開集合を  $C$  とする

と,  $C^\perp \cdot C$  は又相対コンパクトで,  $\hat{e}$  の  $H$ -不変近傍を与える.

補題13. を適用すれば,  $\{C^\perp \cdot C \cap (\bigcap_j E_{\varepsilon_j, v_j})\}$  が (P-2) の基本近傍系である事が直ちに判る.  $\square$

(P-1)+(A-2)  $\rightarrow$  (P-2).  $X$  を局所連結と仮定する.

$\hat{e}$  の任意の相対コンパクト<sup>前</sup>近傍  $V$  と, それを含むコンパクト集合  $C$  をとる. 補題14 の  $\{E_{\varepsilon, v}\}$  を  $\mathcal{F} \equiv \{F_\alpha\}$  と思つて, 補題13 を適用すると, 適当な有限  $\mathcal{K}$  をとつて,

$W \equiv C \cap (\bigcap_{\mathcal{K}} E_{\varepsilon_j, v_j}) \subset V$  と出来る.  $W$  に含まれる  $\hat{e}$  の連結成分  $W_0$  をとると,  $W$  のとり方と,  $X$  が局所連結の仮定から  $W_0$  は又  $\hat{e}$  の近傍である.  $W_0$  が  $H$ -不変であることを示せば,  $V$  の任意性より (P-2) が出た事になる.

$$\text{さて, } \forall h \in H \text{ で, } W_0 h \subset (\bigcap_{\mathcal{K}} E_{\varepsilon_j, v_j}) h = \bigcap_{\mathcal{K}} E_{\varepsilon_j, v_j}.$$

或は,  $C \cap W_0 h \subset C \cap (\bigcap_{\mathcal{K}} E_{\varepsilon_j, v_j}) \subset V$  而又  $V \subset C$  より,

$W_0 h \cap C = W_0 h \cap V$  は  $W_0 h$  中相対開集合である. 従つて,

$W_0 h = (W_0 h \cap C) + (W_0 h \cap C^c)$  は  $W_0 h$  の二つの相対開集合への分割であるが,  $W_0 h$  の連結性よりその一方は空集合で

なくてはならない。明らかに、 $W_0 h \ni \tilde{e} h = \tilde{e} \in C$  で

$$W_0 h \cap C \neq \emptyset \quad \text{だから, } W_0 h = W_0 h \cap C \subset \left( \bigcap_{j=1}^N E_{g_j, y_j} \right) \cap C \subset W.$$

$W_0 h$  は  $W$  の  $\tilde{e}$  を含む連結成分として  $W_0$  と一致する。  $\square$

$$(P-1) + (A-3) \rightarrow (P-2). \quad H \setminus G \sim (N \setminus H) \setminus (N \setminus G) \text{ であるから, 初めから } N = \{e\} \text{ としよう.}$$

次に,  $H$  を生成するコンパクト集合  $C$  に対し,  $K = C \cup C^{-1}$  として, 補題 14 を適用すればよい。  $\square$

$(P-1) + (A-1') \rightarrow (P-3).$   $(P-1) + (A-1)$  より  $(P-2)$  を示した証明で,  $C$  を相対コンパクト開集合とする代わりに,  $(A-1')$  で仮定する  $H$ -不変な  $(\text{正確})$  正有限測度の可測集合とする。この時  $C^{-1}C$  は  $\tilde{e}$  を内点として含む  $H$ -不変有限測度集合であり,  $C^{-1}C \cap \left( \bigcap_{j=1}^N E_{g_j, y_j} \right)$  の特性函数の全体は,  $(P-3)$  で言う  $f$  の族で,  $H$  を分離するものである。  $\square$

§5. 主定理の証明 (2). 残るは  $(P-2) \rightarrow (I.S\text{-duality})$

の証明のみであるが, 此れははゞ [3] で述べた群の双対定理の議論と並行して行われる。此れではその主要な steps を補題の形であげて行く事とする。

先ず  $\mathcal{R}$  の表現  $\pi$  が与えられたとして, 補題 12 の後の注意により対応する  $\mathfrak{g}_0$  から  $\mathfrak{g}_0$  への有界作用素  $\Pi^\sigma$  を考えると, 此れは補題 16 により,  $(*)$  式を満す。  $(P-2)$  の仮定より,

補題 18.  $H$ -不変な  $L^p_\mu(X) \cap L^q_\nu(X)$  の元よりなる,

approximate identity がある。 ─

証明 (P-2) で仮定された  $X \in X$  は, その  $H$ -不変コンパクト近傍系  $\{V\}$  に対して,  $\mathcal{C}$  の近傍系  $\{V^{-1}V\}$  を考える事により,  $X = \tilde{e}$  であるとしてよい. その近傍系の元の特性函数を, 適宜に normalize すれば, 求める approximate identity を得る. ─

補題 19.  $\forall f_1 \in \mathcal{C}_0^\infty \cap L^\infty(X), \forall f_3 \in \mathcal{C}_0^\infty$  で,

$$(**) \quad (\Pi^\circ f_1)(\Pi^\circ f_3) = \Pi^\circ(f_1 \cdot f_3) \quad \text{a.e.} \quad \text{─}$$

証明 補題 18. で得た approximate identity を (\*) 式の  $f_2$  に代入して極限をとればよい. ─

補題 20.  $X$  上の有限測度の  $H$ -不変 Borel 集合  $E$  に対して, ある Borel 集合  $\Pi^\circ(E)$  が対応して,

$$\Pi^\circ \chi_E = \chi_{\Pi^\circ(E)}. \quad \text{─}$$

証明. (\*\*\*) で,  $f_1 = f_3 = \chi_E$  とおくと,  $(\Pi^\circ \chi_E)^2 = \Pi^\circ \chi_E$  を得て,  $\Pi^\circ \chi_E$  は又, ある Borel 集合の特性函数である. ─

補題 21.  $H$ -不変 Borel 集合  $E$  で,  $\infty > \mu(E) > 0$  なら  $\mu(\Pi^\circ(E)) > 0$  ─

証明  $\mu(\Pi^\circ(E)) = 0$  とする.  $E$  に入る任意の  $H$ -不変 Borel 集合  $F$  について,  $\mu(\Pi^\circ(F)) = 0$  は見易い.  $E \cap F$  を考えると容易に  $\mu(\Pi^\circ(E \cap F)) = 0$  を得るから,  $\mathcal{C}$  のある  $H$ -不変近傍系  $\{V\}$  に対して  $\mu(\Pi^\circ(V)) = 0$  を得た. (P-2) の仮定の近傍系との共通部分をとって, 補題 18. 同様にして approximate identity  $\{c_E \chi_E\}$  を作ると,  $\Pi^\circ(c_E \chi_E) = 0$  がえられた.

次に(\*)式で,  $f_1 = \chi_E \chi_E$ ,  $f_2 \in C_0(X)$ ,  $f_3 = \chi_{[f_2]}$  と代入して極限をとると,  $\Pi^\sigma(f_2) = 0$  となるが,  $f_2$  の任意性から,  $\Pi^\sigma = 0$  となり矛盾.  $\square$

補題 22.  $\forall f \in C_0^+(X)$  と  $a > 0$  に対して,

$$E_a \equiv \{g \mid f(g) \geq a\}, \quad F_a \equiv \{g \mid \Pi^\sigma(f)(g) \geq a\} \quad \text{とすると}$$

$$F_a = \Pi^\sigma(E_a) \quad \square$$

証明.  $\Pi^\sigma$  の線型性と補題 20 より step function に対して同様の命題は明らかである.  $f \in C_0^+(X)$  に対しては, step function で一様に近似して結果を得る.  $\square$

補題 23.  $\Pi^\sigma$  は isometry である.  $\square$

証明. 補題 12 より  $\|\Pi^\sigma\| \leq 1$  を示せばよいが, それには,  $\mu(E) \leq \mu(\Pi^\sigma(E))$  を示せばよい.

今  $\mu(E) > a > \mu(\Pi^\sigma(E))$  とし,  $\psi(g) \equiv a^{-1} \chi_E(g)$  を考えて,  $\varphi(g) \equiv \langle T_g^\sigma \psi, \psi \rangle$  を計算する.

$\varphi(e) = a^{-1} \mu(E) > 1$  であるが,  $\Pi^\sigma(\varphi)(g) \leq a^{-1} \mu(\Pi^\sigma(E)) < 1$  であって, 補題 21, 22 に矛盾する.  $\square$

補題 24. 任意の正測度の  $H$ -不変相対コンパクト Borel 集合  $E$  に対して, ある  $g_E \in G$  があって,  $\Pi^\sigma(E) = E \cdot g_E$   $a.e.$   $\square$

証明.  $\{g \in G \mid \langle T_g^\sigma \chi_E, \chi_E \rangle > \mu(E) - \varepsilon\}$  と

$\{g \in G \mid \langle T_g^\sigma \chi_{\Pi^\sigma(E)}, \chi_E \rangle > \mu(E) - \varepsilon\}$  とは互に

$\Pi^\sigma$  で移り合うから,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とし,



(1) 発散する  $\{g_n\}$  の列により,  $\mu(\Pi^\circ(E) \wedge E g_n) \rightarrow \mu(E)$ .

(2)  $\mu(\Pi^\circ(E) \Delta E g_E) = 0$  となる  $g_E \in G$  がある.

この二つの場合が考えられるが,  $E$  の相対コンパクト性から,

(1) の場合はあり得ない. ┘

補題 25. ある  $g \in G$  によって,  $\Pi^\circ = T_g^\circ |_{\mathcal{G}_0^\circ}$ . ┘

証明. (P-2) で仮定された  $\varepsilon$  の  $H$ -不変基本近傍(コンパクト)系を  $\{W_\alpha\}$  とする.  $W_\alpha \cap W_\beta$  で  $\Pi^\circ(W_\alpha) \cap \Pi^\circ(W_\beta)$  だから, 補題 24 で  $\Pi^\circ(W_\alpha) = W_\alpha g_\alpha$  とすると,  $W_\alpha g_\alpha \cap W_\beta g_\beta$  となり,  $\widetilde{g_\alpha g_\beta} \in W_\alpha^{-1} W_\beta$  を得て,  $\{\widetilde{g_\alpha}\}$  は  $X$  上の Cauchy 列を作る.  $X$  の完備性から,  $\{\widetilde{g_\alpha}\}$  は極限  $\widetilde{g}_0$  を持つが,

$\forall f \in \mathcal{G}_0^\circ$  に対し,  $\{W_\alpha\}$  に対応する  $X$  上の approximate identity  $\{\psi_\alpha\}$  を考えると.

$$\Pi^\circ(\langle T_g^\circ \psi_\alpha, f^* \rangle) = \langle T_{g g_\alpha} \psi_\alpha, f^* \rangle$$

の左辺の極限は  $\Pi^\circ(f)$ , 右辺の極限は  $T_{g_0} f$  となる. ┘

補題 26. 補題 25 の  $g_0$  に対して,  $\forall \varphi \equiv (\omega, \nu) \in \mathcal{R}^c$ ,

$$u(\varphi) = T_{g_0}^\omega \nu. ┘$$

証明. 補題 15 の対応  $B\omega$  について, 補題 16 と同様にして (\*) に対応する式を作れば,  $\forall \psi \in \mathcal{G}_0^\omega, \forall f \in \mathcal{G}_0^\circ$  で

$$\langle T_g^\omega u(\varphi), \psi \rangle \Pi^\circ(f)(\widetilde{g}) = \Pi^\circ(\langle T_g^\omega \nu, \psi \rangle f)(\widetilde{g}).$$

$\Pi^\circ = T_{g_0}^\circ |_{\mathcal{G}_0^\circ}$  を代入すれば,

$$\langle T_g^\omega u(\varphi), \psi \rangle f(\widetilde{g}_0) = \langle T_{g_0}^\omega \nu, \psi \rangle f(\widetilde{g}_0).$$

となり, 補題 11. と,  $\psi, \rho$  の任意性より結論が得られる。」

§ 6. 今後の問題点.

(1) 主定理よりすれば, たとえば  $H \setminus G$  が discrete であるとか,  $H$  がコンパクトまたは正規部分群の時は, 直接 (P-2) が示されるから, 此れ等の場合には, 無条件に I.S-duality が成立する.

更に, 主定理は, 付加条件 (A) の下で, "十分多くの  $H$ -不変ベクトルが存在する" 事を意味する (P-1) が I.S-duality の成立する為の必要十分条件である事を示す. たとえば, (A-2) は  $G$  が Lie 群の時には成立し, (A-3) は  $H$  が連結ならよい.

更に条件 (A) の下では, " $\text{Ind}_{H \setminus G} \mathbb{1}_H (= 0)$  の中に十分多くの  $H$ -不変ベクトルが存在する" 事を示す (P-3) が, 他の条件と同値になるから, 特定の表現  $\sigma$  を左フックする事によって, I.S-duality の成否が判る. I.S-duality の成立せぬ例として挙げた例 7 は, 此の形で見ると容易に判定出来る。(補題 9).

此の様には, 条件 (A) の下では割合はつきりするが, (A) を満たさない場合の事情は判って居ない. 実際, *totally disconnected* な群で, I.S-duality は成立するが, (P-2) を満たさぬ例を作る事が出来る.

此の如く, I.S-duality の成立する為の, 簡単な必要十分条件を求めぬ事が, 今後の課題の 1 つと云える.

(2) 次に、上に触れた条件(P-3)は、(P-2)を少し締め付けた形であるが、 $X$ の位相と直接関係のない形で、しかも特定の表現  $\sigma \equiv \text{Ind}_{\text{HIG}} \mathbb{1}_H$  について述べられて居るので扱い易い。条件(A)の下では、他の条件と同値になるが、一般の場合(P-3)と I.S-duality との関係はまだ判って居ない。此の辺りの関連性を解明する事も興味がある。

(3) 本文で述べた如く、群の双対性と異り I.S-duality が成立するのは、特別な  $(G, H)$  の pair に限られる訳であるが、此の事がどの様な意味を持つのか? と云った事も残された課題である。  $G$  に対し、 $(G, H)$  が I.S-duality を満たす様な用部分群  $H$  の全体については、[5] で述べた所のバクトルによる dual の subalgebras との間の Pontrjagin の双対性を考える事が出来るが、たとえば、例7であげた様な重要な用部分群で既に此の枠からはみ出るものがある。(補題9参照)

其処で、何らかの形で、I.S-duality の formulation を拡大して、此の様な落ち二ぼれなく、Pontrjagin の双対性に対応する命題が得られないであろうか。

文 献

- [1] N. Bourbaki ; Integration chap. VII  
Hermann (1963).
- [2] N. Iwahori & M. Sugiura ; A duality theorem  
for homogeneous manifolds of compact Lie groups,  
Osaka J. Math., 3 (1966), pp 139-153.
- [3] N. Tatsuuma ; A duality theorem for locally  
compact groups, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967),  
pp 187-293.
- [4] A. Weil ; L'integration dans les groupes  
topologiques et ses applications, Hermann (1940).
- [5] 辰馬伸考 ; 正規部分群に対する双対性,  
数理解析研究所講究録 262 (1976) pp 72-91.