数理解析研究所講究録
第 280 巻 1976 年 85-93

Spin(4,1) 上の球函数の展開について

早大 理工　　大豆生田稚一

§1 序　Harish-Chandra は [2] に於て半単純リー群 G 上のある種の球函数の指数函数の巾による展開を与えたが，これは，G 上の Paley-Wiener 型定理，特に逆 Fourier 変換の性質の研究に重要な意義を持つ。しかし，この展開に現れる「係数」はルート系に関する複雑な induction によって与えられているので，一般には詳しい性質は明らかではない。ここでは $G = Spin(4,1)$ に対し，この展開の「特異点」の分布を求める。これは $Spin(4,1)$ 上の Paley-Wiener 型定理の証明に必要となる。([3]).

§2 Harish-Chandra による $E(z, \nu, x)$ の展開

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ によって複素数体，実数体，整数環を表わす。又，$k = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ 上の線型空間 E, E' に対して，E から E' への線型写像（k 上の）全体を $\mathrm{Hom}_k(E, E')$ と書く。

$G = Spin(4,1)$，K をその極大コンパクト部分群，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ を

各々のリー環，又対応する Cartan involution を θ とする。$G=KAN$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ を岩沢分解 対応する $g\in G$ の分解を $g=k(g)\exp H(g)\,n(g)$　$k(g)\in K$，$H(g)\in\mathfrak{a}$，$n(g)\in N$ とする。α を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ に関する正の制限ルートとすれば，$\mathbb{C}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ とは $z\leftrightarrow z\alpha$ によって同一視出来る。又，W を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Weyl 群とすれば，W は K の中心の位数 2 の部分群と同一視出来る。W の単位元を e，位数 2 の元を s と書くと，$s\alpha=-\alpha$ によって $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ 上作用する。

M を $\mathfrak{a}$ の K における中心化群，(τ_i, V_i) $(i=1,2)$ を K の既約ユニタリ表現，このとき，$V_M=\{v\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1);\ \tau_1(m)v=v\tau_2(m)$ $\forall m\in M\}$ とおく。又 τ_i を $\mathfrak{k}$ の展開環の表現へ拡張し，再び同一の記号 τ_i で表わす。

そこで，$z\in\mathbb{C}$，$v\in V_M$，$x\in G$ に対して

(1)　$E(z,v,x)=\int_K e^{(z-\frac{1}{2})\alpha(H(xk))}\,\tau_1(k(xk))\,v\,\tau_2(k^{-1})\,dk.$

ここで dk は K の正規化された Haar 測度とする。

$V^M=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_M, V_M)$，$H\in\mathfrak{a}$，$\alpha(H)=1$ となる H に対して，$a_t=\exp(tH)$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく。すると Harish-Chandra による $E(z,v,a_t)$ の展開定理は次の様になる。（[2] 及び [6] の 9 章）

<u>命題 1</u>　V^M に値をとる $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 C_w $(w\in W)$

と，V^Mに値をとる有理函数Γ_k ($k=0,1,2,\cdots$) が存在して，次の性質を満す：

(2) $E(z, v, a_t) = \Phi(z, t)\, C_e(z) v + \Phi(-z, t)\, C_o(z) v$

$t \in \mathbb{R} \quad t > 0, \quad v \in V_M$

(3) $\Phi(z, t) = e^{(z-\frac{3}{2})t} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k(z) e^{-kt} \qquad t \in \mathbb{R} \quad t > 0.$

但し，上の等式は$\mathbb{C}$の適当な open dense な部分集合$\mathcal{O}(\tau_1, \tau_2)$上の正則函数として成立する。

<u>注意</u> Γ_kはkに関する帰納的な等式によって定義される。又，この等式はτ_1, τ_2によって定められる。$t>0$を固定したとき$\Phi(z, t) C_e(z)$，$\Phi(-z, t) C_o(z)$は$\mathcal{O}(\tau_1, \tau_2)$上正則であるが，$\mathbb{C}$上有理型に解析接続出来る。

以下の議論は$t>0$を固定したとき$z \mapsto \Phi(z, t)$の特異点の性質と分布を扱う。

<u>§3 Γ_k，及びC_ωの計算</u>

K, Mの既約ユニタリ表現の同値類の全体をそれぞれ，$\hat{K}$，$\hat{M}$で表わす。表現の highest weight を考えれば，

$\hat{K} = \{ (n, n') \,;\, 2n, 2n' \ n-n' \in \mathbb{Z} \quad |n'| \leq n \}$

$\hat{M} = \{ n'' \,;\, 2n'' \in \mathbb{Z} \quad n'' \geq 0 \}$

と同一視出来る。

$\tau \in (n, n') \in \hat{R}$ に対して

$$A(\tau) = \{ n'' \in \hat{A} \ ; \ |n'| \leq n'' \leq n, \ \ n - n'' \in \mathbb{Z} \}.$$

又, $\tau_i \in (n_i, n_i') \in \hat{R}$ $i = 1, 2$ に対して

$$A(\tau_1, \tau_2) = A(\tau_1) \cap A(\tau_2)$$

と書く。

ω_M を M の Casimir 作用素とすると $\sigma \in (n'') \in \hat{M}$ に対して, $\sigma(\omega_M) = n''(n''+1)\, id_\sigma$ (id_σ は σ の表現空間上の恒等作用素). 又 $(n'') \in A(\tau)$ に対し.

$$C_{n''}(z, \tau) = \frac{\varepsilon^{2n''} \, 2^{-2z+3} \, \Gamma(2z) \, \Gamma(-z+\frac{3}{2}+n) \, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-|n'|)}{\Gamma(-z+\frac{3}{2}+n'') \, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-n'') \, \Gamma(z+\frac{3}{2}+n) \, \Gamma(z+\frac{1}{2}-|n'|)}$$

とする。

ここで, $\varepsilon = \begin{cases} -1 & n' < 0 \\ 1 & n' \geq 0 \end{cases}$

又, Γ は普通の Γ-関数とする。

<u>命題2</u>

1) $A(\tau_1, \tau_2) \neq \phi \iff V_M \neq \{0\}$.

2) $A(\tau_1, \tau_2) \neq \phi$ とする。各 $p \in A(\tau_1, \tau_2)$ に対して $v_p \neq 0 \in V_M$ が存在して, $\tau_1(\omega_M) v_p = v_p \tau_2(\omega_M) = p(p+1) v_p$ であり, $\{ v_p \ ; \ p \in A(\tau_1, \tau_2) \}$ が V_M の基底となる。

又, $i = 1, 2$ に対し, 次の等式が成立する。

(5) $$\int_{\bar{N}} e^{-(z+\frac{3}{2})\alpha H(\bar{n})} \, v_p \tau_i(k(\bar{n}))^{-1} \, d\bar{n} = C_p(z, \tau_i) \, v_p.$$

ここで $d\bar{n}$ は $\bar{N}=\exp\bar{\mathfrak{n}}$ 上の Haar 測度であり、
$\int_{\bar{N}} e^{-3\alpha H(\bar{n})}\, d\bar{n} = 1$ となる様正規化されているものとする。又、$\mathrm{Re}\, z > 0$ とする。

(6) $$\begin{cases} C_e(z) v_p = C_p(z, \tau_2)\, v_p\, \tau_2(s) \\ C_\theta(z) v_p = C_p(-z, \tau_1)\, v_p\, \tau_2(s) \end{cases} \qquad p \in A(\tau_1, \tau_2)$$

さらに、$T_k(z) v_p = \sum_{q \in A(\tau_1, \tau_2)} T_k(z, p, q) v_q$ と書き表わすとき、$a_{r,q}, b_q \in \mathbb{C}$ が存在して、

(7) $$\{2kz - k^2 + p(p+1) - q(q+1)\}\, T_k(z, p, q)$$
$$= 6 \sum_{j \geq 1} \{z - (\tfrac{3}{2} + k - 2j)\}\, T_{k-2j}(z, p, q)$$
$$+ 4 \sum_{j \geq 1} (2j-1) \sum_{r \in A(\tau_1, \tau_2, p)} a_{rq}\, T_{k-(2j-1)}(z, p, r)$$
$$- 4 \sum_{j \geq 1} j\, b_q\, T_{k-2j}(z, p, q)$$

ここで、

$$T_k(z, p, q) \equiv 0 \qquad k < 0$$
$$T_0(z, p, q) = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q. \end{cases}$$

又、$A(\tau_1, \tau_2, p) = \{ r \in A(\tau_1, \tau_2) \mid |r - q| \leq 1 \}$.

証明の概略.

まず、1) と 2) の前半は、K が $SU(2) \times SU(2)$ に同型であり、M がその対角部分群と考えられる([4])から、表

現の分岐律を適用すればよい。([I]) (5)の左辺はGの主系列のintertwining operatorから得られる。(intertwining operatorをtype τ_iのK-finiteベクトルに作用させることの積分が得られる。) そこで, (5)の両辺の$\tau\in(n,n')$に関する巡回公式を調べると, 同一であることが分る。従って(5)は$n=|n'|=p$の場合に帰着され, この場合は, 実際に積分を計算して得られる。(6)については[6]の9章, 9.1.6と同様の議論によって与えられる。最後に(7)はT_Rの定義式に於けるV_M上の線型写像のV_pに関する行列要素を計算すればよいが, これは, 幾分か複雑な計算を必要とする。特に, (K,M)の表現に関する可成り詳しい分岐律についての結果が必要となる。

§4 $\Phi(z,t)$の「特異点」の分布.

$t>0$を固定したとき$z\mapsto\Phi(z,t)$のベクトル値函数としての特異点を$\Phi(z,t)$の特異点と呼ぶ。$t>0$を固定したとき$z\mapsto\Phi(z,t)$の特異点の集合は命題1により$\mathbb{C}$のdiscreteな部分集合であることが分る。そこで(2)の両辺の特異点の回りのLaurent展開を考えることが出来る。(1)により$E(z,\nu,a_t)$はzの函数として整函数である。そこで, Laurent展開の係数の$t\to+\infty$での行動を

考えると，(3)により，$z \mapsto \Phi(z,t)C_e(z)v$，$z \mapsto \Phi(z,t)C_o(z)v$ の特異点は $t>0$ に無関係に定まり，高々1位の極であることが結論出来る。故に「$\Phi(z,t)$ の特異点」が意味を持つ。さらに，(6) を考えれば，$z \mapsto \Phi(z,t)v_p$ は高々2位の極しか持たないことが分る。$\Phi(z,t)v_p$ の特異点について次の命題が成立する。

<u>命題3</u>　$\hat{M}(\tau_1,\tau_2) \neq \emptyset$ とする。$t \in \mathbb{R}$，$t>0$ 及び $p \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$ を固定したとき $z \mapsto \Phi(z,t)v_p$ は $\mathbb{C}$ 上 V_M に値をとる有理型函数であり，その特異点は t に無関係に定まり，1位の極である。さらに次の点を除いては，函数 $\Phi(z,t)v_p$ は正則である。

1)　$z=k$　$k>0$　$k-p \in \mathbb{Z}$

2)　$z=k+\frac{1}{2}$　$k \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$，$p<k$

3)　$z=k+\frac{1}{2}$　$2k \in \mathbb{Z}$，$p-k \in \mathbb{Z}$，$0 \le k < \min(M_1', M_2')$

4)　$z=-k-\frac{1}{2}$　$k \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$　$k<p$

証明の概略.

$t>0$，$z \mapsto \Phi(z,t)C_e(z)v_p$，$z \mapsto \Phi(-z,t)C_o(z)v_p$ の $z=z_0$ に於ける留数をそれぞれ $\psi_e(z_0,t)$，$\psi_o(z_0,t)$ とする。このとき，ψ_e，ψ_o は $G \sim K$ 上の実解析函数

$\Phi_e(z_0\ x)$, $\Phi_s(z_0\ x)$ であって 函数等式

$$\Phi_\omega(z_0\ k_1 x k_2) = \tau_1(k_1)\,\Phi_\omega(z_0\ x)\,\tau_2(k_2)$$

$$k_1,\ k_2 \in K, \quad x \in G \setminus K \quad \omega = e,\ s$$

を満す様に一意に拡張出来る。

さらに $\mathfrak{Z}$ を G 上の両側不変微分作用素全体の作る環とすると $\Phi_\omega(z_0\ x)$ は $\mathfrak{Z}$ に関する同時固有函数となることが分る。又，このとき，その固有値は z_0 及び p によって一意に決定される。

[1] の結果の内で，$\mathfrak{Z}$ に関する固有値と $\lim_{t\to+\infty}\Phi_\omega(z_0\ a_t)$ の行動に関する対応の部分は $\Phi_\omega(z_0\ a_t) = \Psi_\omega(z_0\ t)$ の $t=0$ と無関係に成立する。このことから，(7) を用いて，z_0 が命題3の除外点でなければ，$\Psi_\omega(z_0\ t) = 0$ が結論出来る。

尚，詳しい証明は [3] に於いて発表する予定です。

参考文献

[1] H. Boerner : Darstellungen von Gruppen, Springer

[2] Harish-Chandra : Differential equations and semi-simple Lie groups (unpublished)

[3] M. Mamiuda : An analogue of Paley-Wiener-theorem on the de Sitter group (to appear)

[4] R. Takahashi : Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés.
Soc. Math. France., 91 289-433 (1963)

[5] P. C. Trombi, V. S. Varadarajan ; Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group ; the discrete spectrum.
Acta Math, 129, 237-280 (1972)

[6] G. Warner ; Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer.