数理解析研究所講究録
第 280 巻 1976 年 116-121

Translation invariant operators in L^p

東北大 理　猪狩 惺

1. G を局所コンパクト可換群とする.

$$\tau_y f(x) = f(x-y) \qquad x, y \in G$$

とおく. $1 \le p \le q \le \infty$ とするとき, 線型作用素

$$T : L^p(G) \mapsto L^q(G)$$

が translation invariant であるとは,

$$T\tau_y = \tau_y T \qquad (y \in G)$$

をみたすことである. 上の性質をもつ有界作用素の全体を $L_p^q(G)$ とかく. 以下 $p = q$ の場合に限って考える.

1) $L_p^p(G) = L_{p'}^{p'}(G)$ $(1/p + 1/p' = 1)$ 等距離的.

2) $L_p^p(G) \subsetneq L_q^q(G)$ $(1 \le p \le q \le 2)$ ノルム非増加.

3) $L_1^1(G) = M(G)$, すなわち, G 上の有界正則ボレル測度の全体.

4) $T \in L_2^2(G)$ ならば $\varphi \in L^\infty(\hat{G})$ が存在して

$$(Tf)^\wedge = \varphi \cdot \hat{f} \quad \text{on } \hat{G}, \qquad f \in L^2(G). \tag{1}$$

ここに $\hat{f}$ は f のフーリエ変換，$\hat{G}$ は G の双対群である．

逆に，$\varphi \in L^{\infty}(\hat{G})$ に対して T を上の式で定義するとき，$T \in L_2^2(G)$ として

$$L_2^2(G) \simeq L^{\infty}(\hat{G}) \quad \text{等距離的.}$$

1）〜4）によって，$T \in L_p^p(G)$ なら $\varphi \in L^{\infty}(\hat{G})$ が存在して（1）が成りたつ．このとき $T = T_{\varphi}$ とかく．

$$M_p(\hat{G}) = \{\varphi : T_{\varphi} \in L_p^p(G)\}$$

とかき $M_p(\hat{G})$ の元を L^p-multiplier という．$\varphi \in M_p(\hat{G})$ に対してノルムを

$$\|\varphi\|_{M_p(\hat{G})} = \|T_{\varphi}\|_{L^p(G) \mapsto L^p(G)}$$

で定義するとき $M_p(\hat{G})$ は可換，単位元をもつバナッハ代数となる．

空間 $M_p(\hat{G})$ の元の特徴ずけやバナッハ代数としての性質は $p=2$ の場合を除いて複雑である．$1 < p, \neq 2 < \infty$ の場合の系統的な研究は L. Hörmander [1] に，$p=1$ の場合の代数的系統的な研究は J. L. Taylor [6] や W. Rudin [5] 等にある．ここで $1 < p \neq 2, < \infty$ の場合の M_p の元の性質を $p=1$ の場合の次のような性質に着目して述べる．

$M_1(\hat{G}) = B(\hat{G})$ すなわち，$M(G)$ のフーリエ・スチエルチエス変換の全体である．

5）（Wiener - Pitt）G は離散的でないとき，$\varphi \in M_1(\hat{G})$ で

$$\varphi \geq 1 \text{ on } \hat{G}, \quad 1/\varphi \notin M_1(\hat{G})$$

なる φ が存在する.

6) (Wiener). $\varphi \in M_1(\hat{G})$, C は $\hat{G}$ のコンパクト部分集合ならば, $f \in L^1(G)$ が存在して $\varphi = \hat{f}$ on C. 従って, $\varphi \geq 1$ on C ならば, $\psi \in M_1(\hat{G})$ が存在して $1/\varphi = \psi$ on C. 従って, $M_1(\hat{G})$ の元が局所的に可逆である必要十分条件は 0 とならない事である.

一般に, $M_1(\hat{G})$ の可逆元の特徴づけは, J. L. Taylor [6] によって一つの完全な解が与えられた.

2. 代数 $M_p(\hat{G})$. 以下簡単のため, $G = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$ または $\mathbb{Z}^d$ とする. $1 < p < 2$ とする.

<u>定理</u> 1 (猪狩 [2]). G は離散的でないとする. Φ は区間 $[-1, 1]$ 上の函数で

$$\varphi \in M_1(\hat{G}),\ \mathrm{range}\,\varphi \subset [-1, 1] \Rightarrow \Phi(\varphi) \in M_p(\hat{G}) \qquad (2)$$

とする. このとき Φ は整函数に延長される.

特に, $\Phi(z) = (1 + z^2)^{-1}$ を考えることによって, $\varphi \in M_1$ が存在して, φ は実数値であるが, spectrum$(\varphi) \ni i$ であることがわかる. ゆえに, 代数 $M_p(\hat{G})$ は対称でも正則でもない. また上の φ に対して $\psi = 1 + \varphi^2 \in M_1$ とおけば, II 5) の Wiener-Pitt の現象が $M_p(\hat{G})$ に対しても起きること

がわかる．すなわち，

系 1. G は離散的でないとする．$\varphi \in M_p(\hat{G})$ が存在して

$$\varphi \geq 1 \text{ on } \hat{G}, \quad 1/\varphi \notin M_p(\hat{G}).$$

M. Zafran [7], [8] は，定理 1 の (2) の仮定を

$$\varphi \in M_p(\hat{G}),\ \mathrm{range}\ \varphi \subset [-1,1],\ \varphi \text{ は連続},\ \varphi(\infty) = 0$$

としても定理 1 の結論は成りたつことを示した．

定理 1 は $\hat{G} = \mathbb{T}^d$ のときは，Wiener-Lévy の定理によって成りたたない．しかし，

定理 2 （猪狩 [3]）．$G = \mathbb{Z}^d$ とする．定理 1 は (2) の条件を

$$\varphi \in M_p(\hat{G}),\ \mathrm{range}\ \varphi \subset [-1,1]$$

とするとき成りたつ．

M. Zafran は要約 [9] の中で更に $\varphi \in M_p(\hat{G})$ は連続としてもよいことを主張している．

上と同様な論法によって，系 1 は $G = \mathbb{Z}^d$ のときも成りたつことが定理 2 からわかる．

補題（M. Jodeit, Jr. [4]）．$1 < p < \infty$ とする．$\mathbb{T}^d$ を $\mathbb{R}^d$ の 0 を含む区間とみなすとき，$\varphi \in M_p(\mathbb{R}^d)$ ならば φ の $\mathbb{T}^d$ への制限は $M_p(\mathbb{T}^d)$ に属する．また，$\varphi \in M_p(\mathbb{T}^d)$ ならば φ を $\mathbb{R}^d$ 上へ周期函数として延長したとき $M_p(\mathbb{R}^d)$ に属する．

上の補題と，系 1 の $\hat{G} = \mathbb{T}^d$ の場合を組合せると，scale

を変えることによって次の系が得られる．

系2．$A \subset \mathbb{R}^d$の空でない開集合とする．$\varphi \in M_p(\mathbb{R}^d)$が存在して，$\varphi \geq 1$ しかし $1/\varphi|_A \notin M_p(\mathbb{R}^d)|_A$，ここで $\cdots|_A$ は A への制限をあらわす．

従って，II 6) は $M_p(\mathbb{R}^d)$ に対しては成りたたない．これは $M_p(\mathbb{R}^d)$ の極大イデアルの空間が $M_1(\mathbb{R}^d)$ のそれよりより複雑であることに由来していると思われる．

引用文献

[1] L.Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math.,104(1960),93-140.

[2] S.Igari, Functions of L^p-multipliers, Tohoku M.J.,21(1969),304-320.

[3] ———, ——— II, ibidem, 26(1974),555-561.

[4] M.Jodeit,Jr., Restrictions and extensions of Fourier multipliers, Studia Math.,34(1970), 215-226.

[5] W.Rudin, Fourier Analysis on Groups,Intersci.Publ.,1962.

[6] J.L.Taylor, Inverses,logarithms and idempotents in M(G), Rocky M^t J.M., 2(1972),183-206-

[7] M.Zafran, Spectra of convolution operators on L_p spaces, Proc.Nat. Acad.Sci.U.S.A., 72(1974), 3285-3286.

[8] M.Zafran, The spectra of multiplier transformations on the L_p spaces, Ann.of Math., to appear.

[9] M.Zafran, The functions operating on certain algebras of multipliers, to appear.