数理解析研究所講究録
第281巻 1976年 176-191

Fuchs型偏微分方程式におけるFrobeniusの方法.

上智大 理工 田原秀敏.

複素領域における常微分方程式論の中で、最も基礎的なものといえば、正則解の存在に関するCauchyの定理、及び、退化した場合の、確定特異点、不確定特異点の理論等であろう。これ等に対応する結果を、偏微分方程式論の中で捜してみるに、正則解の存在に関しては、Cauchy-Kowalevskyの定理があるものの、退化した場合の、確定、不確定特異点の結果に対応するものは、あまり見あたらない.

しかし、常微分方程式の場合に展開された方法、議論は、かなりNaturalなものが多く、見る視点を変えて考えると、そのまま偏微分の場合に迄通用しうるものも少なくない.

本稿では、確定特異点の場合に、その特異点のまゆりでの局所解の構造について、常微分の場合とまったく同様の結果を、いわゆる"Fuchs型偏微分方程式"の場合に導びく、それによって、常微分方程式も偏微分方程式も、確定特異点

の近傍での局所構造については、大差ないのだ、ということが、理解されるであろう。

(なお、不確定特異点の場合については、本稿では一切とり扱わない。今後に待たれたい。)

§§1. 問題と結果.

m 階の偏微分作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ (正則函数を係数):

$$P(t,x,D_t,D_x) = t^k D_t^m + P_1(t,x,D_x)t^{k-1}D_t^{m-1} + \cdots$$
$$+ P_k(t,x,D_x)D_t^{m-k} + \cdots + P_m(t,x,D_x)$$

で、次の条件を満たすものを考える。$(t,x) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$,

(A-i) $\quad 0 \leqq k \leqq m$

(A-ii) $\quad \mathrm{order}\ P_j(t,x,D_x) \leqq j \qquad 1 \leqq j \leqq m$

(A-iii) $\quad \mathrm{order}\ P_j(0,x,D_x) \leqq 0, \qquad 1 \leqq j \leqq k$,

条件(A-iii)より $P_j(0,x,D_x) = a_j(x)$ $(1 \leqq j \leqq k)$ と書ける。この時、P に対する決定方程式 $\mathcal{C}(\lambda,x)$ を、次で定義する。

$$\mathcal{C}(\lambda,x) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots$$
$$\cdots + a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$
$$= (\lambda)(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)(\lambda-\rho_1(x))\cdots(\lambda-\rho_k(x)).$$

方程式 $\mathcal{C}(\lambda,x) = 0$ の根、$\lambda = 0, 1, \cdots, m-k-1, \rho_1(x), \cdots, \rho_k(x)$ を、P の決定根と呼ぶ。

上の様な作用素を t に関し Weight $(m-k)$ の Fuchs 型偏微分作用素と呼ぶ．詳しい性質については，Baouendi-Goulaouic [1]，田原[2][3][4] を参照されたい．特に P は $\{t=0\}$ 上に，確定特異点をもつ事に注意されたい．

$\tilde{\mathcal{O}}=\{$ 高々 $\{t=0\}$ にのみ特異点をもつ多価正則函数の芽の全体（原点の近傍）$\}$

［問題］ $P(t,x,D_t,D_x):\tilde{\mathcal{O}}\longrightarrow\tilde{\mathcal{O}}$ の構造を決定せよ．

［結果］ "$\rho_i(0)$, $\rho_i(0)-\rho_j(0)\notin\mathbb{Z}$.（$1\leq i\neq j\leq k$）" を仮定すると

(i) $\mathrm{Coker}\,P\cong 0$.

(ii) $\mathrm{Ker}\,P\cong{}'\mathcal{O}^m$

但し $'\mathcal{O}$ は，x のみの正則函数芽全体（at 原点）．更に (ii) の同型は，次で与えられる．つまり，次の (0)～(3) を満たす様な正則函数 $K_1(t,x,y),\cdots,K_m(t,x,y)$ が存在する．

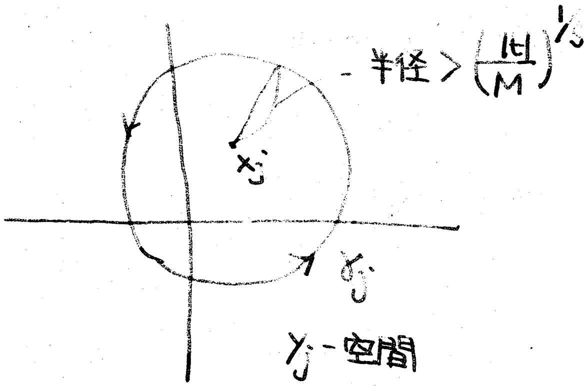
(0) $K_j(t,x,y)$ は次の領域での多価正則函数である．

$$U=\{(t,x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |t|,|x|,|y|<\varepsilon,$$
$$0<|t|<M|x_i-y_i|^s\ (i=1,\cdots,n),\ 但し\ s=\min(m,k+1)\}.$$

(1) 任意の $\varphi_j(x)\in{}'\mathcal{O}$ に対して，$u(t,x)$ を次の様におく．

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n}K_j(t,x,y)\varphi_j(y)\,dy.$$

但し積分は右図の様な途にそって線積分を行なう.



この時 $u \in \mathcal{O}$ で、かつ $P(t,x,D_t,D_x)\,u(t,x) = 0$ が成立つ.

(2) 逆に、$u \in \mathcal{O}$, $Pu = 0$ ならば、適当な $(\varphi_j)_{1\le j\le m} \in \mathcal{O}^m$ によって (1)の積分の形にかける.

(3). (1)の表わし方は、一意的である.

この(0)〜(3)より(ii)の同型は得られる。今別の $H_j(t,x,y)$, $(1\le j\le m)$ で(0)〜(3)を満たすものをとるとする、この時 条件(2)(3)より、任意の解 $u \in \mathcal{O}$, $Pu = 0$ は、

$$u = \sum_{j=1}^{m} \oint K_j(t,x,y)\,\varphi_j(y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} \oint H_j(t,x,y)\,\psi_j(y)\,dy$$

とかける.

この時、(φ_j)と(ψ_j)とは、適当な微分作用素(無限階)を成分とする可逆行列 $G(x,D_x)$ (KとHのみに依存)によって

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_m\end{pmatrix} = G(x,D_x)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots \\ \varphi_m\end{pmatrix}$$

と表わされる.

従って上の(0)〜(3)をみたす$\{K_j\}$を、$\mathcal{O}$-解の基本系と呼んでさしつかえない。基本系の標準的な構成法は、次の

様は Frobenius の方法の拡張した方法によって得られる.

(Frobenius の方法による具体的な解の構成法).

① 決定根 $\lambda=0,1,2,\cdots,m-k-1$ に対する解の構成.

これは定数だから、どんな方法でもよい。常微分方程式の場合の整数差が表われる場合の Frobenius の方法を適用しても良いし、或いは Baouendi-Goulaouic[1] の様に Cauchy 問題として考えても良い。後者の方法で述べると次の様になる。

$$K(t,x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x,y)\,t^j$$

と Taylor 級数におく。作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ も Taylor 級数に展開して $P(t,x,D_t,D_x)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k P^{(k)}(x,D_t,D_x)$ とおく。今具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}&P(t,x,D_t,D_x)\,K(t,x,y)\\&=\left[e(m-k,x)c_{m-k}-d_{m-k}\right]+\left[e(m-k+1,x)c_{m-k+1}-d_{m-k+1}\right]t\\&\quad+\cdots+\left[e(\lambda,x)c_\lambda-d_\lambda\right]t^{\lambda-m+k}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

という級数が得られ、各 $d_\lambda(x,y)$ は $c_j(x,y)$ $(0\le j\le\lambda-1)$ のみに依存している。(当然 $c_j(x,y)$ の微分したものを含む。)

決定根 $\rho_i(0)$ に対する仮定より、各 $e(\lambda,x)$ $(\lambda\in\mathbb{Z},\ \lambda\ge m-k)$ は可逆故、$P\cdot K=0$ となる様に、各 c_λ $(\lambda\ge m-k)$ を、

$$c_\lambda(x,y)=\frac{d_\lambda(x,y)}{e(\lambda,x)}$$

と順次決めてゆける。自由に決められるのは、$c_0(x,y),\cdots,c_{m-k-1}(x,y)$ である。そこで Cauchy

データとして．$\begin{cases} C_\nu(x,y) = \delta_{\nu j}\,\delta(x-y) & 0 \le \nu, j \le m-k-1 \\ \delta(x-y) = \dfrac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\dfrac{1}{(x_1-y_1)} \times \cdots \times \dfrac{1}{(x_n-y_n)} \end{cases}$

とおいたものを $K_j(t,x,y)$ $(0 \le j \le m-k-1)$ とおく．この時 $K_j(t,x,y)$ は領域 U で絶対収束する．($t=0$ も含めて．)．収束性の証明は田原 [2]．[3] の matrix の Fuchs 系に関する Cauchy-Kowalevsky の定理を使えばよい。

②決定根 $\lambda = \rho_i(x)$ に対する解の構成．$(1 \le i \le k)$

まず最初に $e(\rho_i(0)+\lambda\,;0) \ne 0$ $\lambda \ge 1$．$\lambda \in \mathbb{Z}$ が成り立つ事に注意しておこう．この場合は常微分方程式論の Frobenius の方法といわれている考え方を運用する。つまり．

$$K(t,x,y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell(x,y)\, t^{\lambda+\ell}$$

という級数を考え．λ をパラメーターとしてとらえる事である．①の場合と同様に $P(t,x,D_t,D_x)$ を作用させて展開すると．

$$\begin{aligned} &t^{m-k}\cdot P(t,x,D_t,D_x)\,K(t,x,y) \\ &= e(\lambda,x)C_0(x,y)\,t^\lambda + [e(\lambda+1,x)C_1 - d_1]\,t^{\lambda+1} + \cdots \\ &\quad + \cdots + [e(\lambda+\ell,x)C_\ell - d_\ell]\,t^{\lambda+\ell} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

と書ける．ここで d_ℓ は C_j $(0 \le j \le \ell-1)$ のみに依存したもの（当然 C_j の微分は含む．）である。ここで各．$C_\ell(x,y)$ $(\ell \ge 1)$ を λ の rational function として．①と同じく．$C_\ell(x,y;\lambda) = d_\ell(x,y;\lambda)/e(\lambda+\ell;x)$ と決める。

すると．
$$t^{m-k}P(t,x,D_t,D_x)K(t,x,y)^{\lambda} = e(\lambda,x)\,c_0(x,y)\,t^{\lambda}$$

を得る。ここで、パラメーター λ に $\lambda=\rho(y)$（注：x ではなく、y-変数!!）を代入する．$e(\rho(0)+\lambda,0)\neq 0$ $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\geq 1$ だから $c_\ell(x,y)$ は well defined である．更に $c_0(x,y)=\delta(x-y)$ とおく．この時．$K(t,x,y)$ が，ひで収束する事は，①と同様 田原[2][3] の定理を使えばよい．要するに評価だけの問題である．

よって．
$$t^{m-k}P\cdot K = e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}$$

を得た。今 $u(t,x)=\oint K(t,x,y)\varphi(y)dy$ とおく。この時．
$$t^{m-k}Pu = \oint (t^{m-k}P\cdot K)(t,x,y)\varphi(y)dy$$
$$= \oint e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}\varphi(y)dy$$

ここで、次の事に注意しよう．　$x=y$ のまわりで Taylor 展開すると
$$e(\rho(y),x) = (*)(\rho(x)-\rho(y))$$
$$= (*)_1(x_1-y_1)+(*)_2(x_2-y_2)+\cdots+(*)_n(x_n-y_n)$$

$(*)_*$ は．holomorphic function

従って．例えは $(*)_1(x_1-y_1)$ について．みると．
$$\oint (*)_1(x_1-y_1)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(x)}\varphi(y)\,dy = 0$$

を得る。それは．$\delta(x-y)$ の定義より．被積分項が．y_1 に関し．x_1 の近傍で正則となり．Cauchy の公式より $=0$ を得る次第で

ある．故に $t^{m-k}Pu=0$．即ち $Pu=0$ を得る。確かに上で構成した $K(t,x,y)$ は，性質(1)をみたしている。

以上によって，各決定根に対応する基本解を具体的に構成したが，それ等 m 個が，解の基本系をなす。（⟸ これが，常微分方程式の場合の自然な拡張になっている．）．

P3の中段から，ここ迄が，［問題］に対する我々の［結果］の陳述である．

なお，"$\rho_i(0),\ \rho_i(0)-\rho_j(0)\in\mathbb{Z}-\{0\}$ $1\le i,j\le k$" の仮定のもとでも，同様の結果が成り立つ．しかし，標準的な基本系（of解）の構成方法は，まだ，分からない．形式的に，Frobeniusの方法の拡張で基本解らしきものを構成できるが，上の(1)〜(3)の意味で基本系をなすかどうか，証明できないでいる．

更に，実際に整数差が表われる場合，解の基本系の存在すら，目下の所不明である．

§§2. 常微分方程式論からの推論．

上の［結果］の証明の概略を述べる前に，常微分方程式論の議論を，どの様に捕えているのか，という事を少し説明して

おこう．簡単の為，$k=m$ で考える。

$$P(t, D_t) = t^m D_t^m + a_1(t) t^{m-1} D_t^{m-1} + \cdots + a_m(t).$$

$t=0$ での決定方程式の根を $\rho_1, \cdots, \rho_m \in \mathbb{C}$．更に $\rho_i - \rho_j \notin \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ としておこう．すると §§1の様に $\sum C_n t^{\lambda+n}$ $(\lambda=\rho)$ と展開する事により，解の基本系 $\{u_j(t) = V_j(t) t^{\rho_j}\}_{1 \le j \le m}$ を得る．$V_j(0)=1$ とする．

所で方程式 $Pu=0$ は，$w^{(i)} = tD_t \cdot (tD_t - 1) \cdots (tD_t - i+1) u$ $(1 \le i \le m)$ により，次の様に行列表示できる．

$$(*) \quad \left(tD_t - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1, & & \\ \vdots & & 2 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_m(t), & -a_{m-1}(t), & \cdots, & & -a_1(t)+m-1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \vdots \\ w^{(m)} \end{bmatrix} = 0.$$

今 $u_j = V_j(t) t^{\rho_j}$ について考えると，$tD_t(tD_t - 1) \cdots (tD_t - i+1) u_j(t) = (tD_t + \rho_j)(tD_t + \rho_j - 1) \cdots (tD_t + \rho_j - i+1) V_j(t) \times t^{\rho_j}$ となる。故に，

$$\Lambda_i(\rho) = (tD_t + \rho)(tD_t + \rho - 1) \cdots (tD_t + \rho - i+1)$$

とおくと，

$$(tD_t - A(t)) \cdot \begin{bmatrix} V(t) \\ \Lambda_1(\rho) V(t) \\ \Lambda_2(\rho) V(t) \\ \vdots \\ \Lambda_{m-1}(\rho) V(t) \end{bmatrix} \times t^\rho = 0$$

（但し，$A(t)$ は $(*)$ の matrix を意味する。）

解のベクトルを $\mathbb{V}(t) t^\rho$ とおく。すると上の方程式は，

$$t \frac{d}{dt} \mathbb{V}(t) \cdot t^\rho + \rho \cdot \mathbb{V}(t) \cdot t^\rho - A(t) \cdot \mathbb{V}(t) t^\rho = 0.$$

を意味する．両辺を t^{ρ} で割ると次を得る．

$$(**) \quad t\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{V}(t) - A(t)\,\mathbb{V}(t) = -\rho\cdot\mathbb{V}(t) = \mathbb{V}(t)\,(-\rho).$$

各 ρ_j に対して，上の $\mathbb{V}(t)$ を作って，$\mathbb{V}_j(t)$ とおく。縦ベクトルを並べて，

$$\mathcal{V} = (\mathbb{V}_1, \cdots, \mathbb{V}_m) = \begin{bmatrix} V_1(t), & \cdots, & V_m(t) \\ \Lambda_1(\rho_1)V_1(t), & & \Lambda_1(\rho_m)V_m(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{m-1}(\rho_1)V_1(t), & & \Lambda_{m-1}(\rho_m)V_m(t) \end{bmatrix}$$

なる行列を定義する．

$$\mathcal{V}(0) = \begin{bmatrix} 1, & \cdots, & 1, \\ \rho_1, & & \rho_m, \\ \rho_1(\rho_1-1), & & \rho_m(\rho_m-1) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1(\rho_1-1)\cdots(\rho_1-m+1), & & \rho_m(\rho_m-1)\cdots(\rho_m-m+1) \end{bmatrix}$$

$$\det\mathcal{V}(0) = \prod_{i>j}(\rho_i-\rho_j)$$

従って，$\rho_i-\rho_j \neq 0 \ (i \neq j)$ ならば，$\mathcal{V}$ は原点の近傍で可逆である．更に $(**)$ より，

$$t\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) - A(t)\,\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(t)\begin{bmatrix} -\rho_1 & & & \\ & -\rho_2, & & \\ & & \ddots, & \\ & & & -\rho_m \end{bmatrix}$$

を満たす。

ここで $\mathcal{V}(t)$ を関数としてではなく，0 階の微分作用素として考えてみる。すると $t\frac{d}{dt}\cdot\mathcal{V}(t) = tD_t\cdot\mathcal{V}(t) - \mathcal{V}\cdot tD_t$ を得る．従って，

$$\left(tD_t - A(t)\right)V(t) = V(t)\cdot\left(tD_t + \begin{bmatrix} -\rho_1 & & & \\ & -\rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\rho_m \end{bmatrix}\right)$$

を得る。$V(t)$ は可逆だから、結局、方程式 $(tD_t - A(t))u = 0$ は、$(tD_t - \rho_j)w_j = 0$ の直和に変換されたことになる。

従って、$\sum_\ell c_\ell t^{\lambda+\ell}$ と展開して解の基本系を構成するというのは、実は、上の様な簡単な方程式に変換する時の、変換行列を構成している事に他ならない。

以上の常微分方程式論と同様の考え方で、§§1で構成した解の基本系を使って、うまく上の様な変換を行ない、その結果、$(tD_t - \rho_i(x))v_i = 0$ なる形の方程式に、もってゆければ、$\mathcal{O}$ での構造はすぐ得られる。つまり、$\mathrm{Coker}\,(tD_t - \rho_i(x)) = 0$、$\mathrm{Ker}\,(tD_t - \rho_i(x)) = \mathcal{O}$、具体的には $u = \varphi(x)t^{\rho_i(x)}$ だからである。従って、[結果]の証明の為には、次の各段階を実行してゆけばよい。

[第1段]、$\mathcal{O}$ の作用環となる様な環の設定。(常微分では、$V(t) \in GL(m, \mathcal{O})$ 故、$\mathcal{O}$ が、それに当たる。)

[第2段]、変換が実際に実現できることの証明。

以下、それ等について説明してゆこう。

§§3. 証明の概略.

簡単の為、ここでも $k=m$ として話を進める. この時 §§1 で構成した基本解は、$K(t,x,y)=L(t,x,y)t^{\rho(y)}$ なる形をしており、$L(t,x,y)$ は t に関しては正則かつ、次の領域で正則となっている.

$$\{(t,x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |t|,|x|,|y|<\varepsilon,\ |t|<M|x_i-y_i|^s\ \ i=1,\cdots,n\}.$$

§§2 の推論を形式的に実行してみよう.

$$(3\text{-}1)\quad A(t,x,D_x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 2 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -P_m(t,x,D_x), & \cdots & & \cdots, & -P_1(t,x,D_x)+m-1 \end{bmatrix}$$

$$V(t,x,y)={}^t(L(t,x,y),\ \Lambda_1(\rho(y))L(t,x,y),\ \cdots,\ \Lambda_{m-1}(\rho(y))L(t,x,y))$$

とおく. $P\cdot K=e(\rho(y);x)\delta(x-y)t^{\rho(y)}$ より

$$(tD_t-A(t,x,D_x))\,V(t,x,y)\cdot t^{\rho(y)}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0, \\ e(\rho(y);x)\delta(x-y) \end{bmatrix} t^{\rho(y)}.$$

右辺を $f(x,y)t^{\rho(y)}$ とおく。§§1 より $\oint f(x,y)t^{\rho(y)}\varphi(y)dy=0$ が、任意の $\varphi\in\mathcal{O}$ に対して成り立つ。 $t^{\rho(y)}$ で割ると

$$(3\text{-}2)\quad t\frac{\partial}{\partial t}V(t,x,y)+\rho(y)V(t,x,y)-A(t,x,\partial_x)V(t,x,y)=f(x,y)$$

故に、今
$$V(t,x,y)={}^t(v_1,\cdots,v_m)\qquad \left(\partial_x v=\frac{\partial}{\partial x}v\ \text{のこと}\right).$$

とおくと、次の関係式が成り立つ.

$$(3\text{-}3).\quad (tD_t - A(t,x,\partial_x))V(t,x,y) = V(t,x,y)\left(tD_t - \begin{bmatrix}\rho_1(y), & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(y)\end{bmatrix}\right) + (f_1,\cdots,f_m).$$

この辺から常微分方程式と若干の相異が出てきた。§§1の解の具体的な積分表示をあわせ考えると、変換行列は、$V(t,x,y)$ そのものではなく、$V(t,x,y)\,dy$ という積分作用素とするべきであろう。微分作用素を積分作用素として Cohomological に定義できる事を思い出すと、次の様な環を導入するのが、最も自然であろう。

$$U^{(j)}_{\varepsilon,M} = \{(t,x,y);\ |t|+|x|+|y|<\varepsilon,\ |t|<M|x_i-y_i|^s \quad i \neq j\}$$

$$\hat{U}_{\varepsilon,M} = \bigcap_{j=1}^{n} U^{(j)}_{\varepsilon,M}.$$

$$\hat{\mathscr{D}}(s) = \underset{M\to 0}{\text{ind-lim}}\left\{\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ind-lim}}\left(\frac{\mathcal{O}(\hat{U}_{\varepsilon,M})}{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathcal{O}(U^{(j)}_{\varepsilon,M})}\right)\otimes dy\right\}$$

この $\hat{\mathscr{D}}(s)$ が ring structure をもち、かつ $\hat{\mathscr{D}}$ の Operation-ring となる事は、$U_{\varepsilon,M}$ etc の領域より明らか。但し作用は、$K_1\cdot K_2\,dy = \left(\oint K_1(t,x,w)K_2(t,w,y)\,dw\right)dy$, $K\cdot\varphi = \oint K(t,x,y)\varphi(y)\,dy$ によって定義するのは、微分作用素の時と同様である。

ちなみに、§§1で使った

$$\oint e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}\varphi(y)\,dy = 0$$

という関係式は、$e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,dy \equiv 0$ in $\hat{\mathscr{D}}(s)$ に由来している。

ここで、次の事に注意しよう.

(イ) $\mathfrak{f}_j(x.y)\,dy \equiv 0$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$

(ロ) $A(t.x.D_x)\cdot(V(t.x.y)\,dy) = (\oint A(t.x\,\partial_x)\,\delta(x-w)V(t\,w\,y)\,dw)\,dy$

$= (A(t.x.\partial_x)V(t.x.y))\,dy.$

(ここで. 微分作用素 $A(t.x.D_x)$ は積分作用素として $A = A(t.x.\partial_x)\delta(x-y)\,dy$ と表わされる事を使って積・を計算している. $\hat{\mathcal{D}}(s) \supset \mathcal{D}$ に注意せよ。)

(ハ) $(V(t.x.y)\,dy)\cdot \rho(x) = (V(t.x.y)\,dy)\cdot(\rho(x)\,\delta(x-y)\,dy)$

$=(V(t\,x\,y)\,dy)\cdot(\rho(y)\,\delta(x-y)\,dy)$

$= (\oint V(t.x.w)\,\rho(y)\,\delta(w-y)\,dw)\,dy$

$= (\rho(y)\cdot V(t\,x\,y))\,dy.$

従って. (3-2)の両辺に dy を掛けて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中で考えると. (3-3)は次の様に書きかえられる.

$$(3\text{-}4).\quad (tD_t - A(t.x.D_x))\,(V(t\,x\,y)\,dy) = (V(t\,x\,y)\,dy)\,(tD_t - \begin{bmatrix} \rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x) \end{bmatrix})$$

(但し積はすべて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中での意味!!).

§§2 の. 常微分の場合と類似の変換式を導びく事ができた. 残り. $V(t.x.y)\,dy \in GL(m.\hat{\mathcal{D}}(s))$ なる事 i.e 可逆なる事を示せばよい。

$$V(t.x.y)\,dy\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots, & 1 \\ \rho_1(x), & & \rho_m(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1(x)\cdots(\rho_1(x)-m+1), & & \rho_m(x)\cdots(\rho_m(x)-m+1) \end{bmatrix} \delta(x-y)\,dy.$$

故. $V(t.x.y)dy|_{t=0}$ は $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の意味で. 可逆である. V の可逆性を示す為, 逆行列を具体的に構成してしまおう.

今 $k=m$ としていた. $P(t.x.D_t.D_x)$ の formal adjoint 作用素を $P^*(t.x.D_t.D_x)$ とおく。 この時 P^* も Fuchs 型偏微分作用素となり, その決定方程式は, $C^*(\lambda.x) = C(-\lambda-1, x)$ となる. 故に, P^* に対しても, 同様に Frobenius の方法 (§§1 の方法) で, m 個の解を構成できる. それを使って, 上と同様のプロセス を実行する事により,

$$(3\text{-}5) \quad (W(t.x.y)dy)(tD_t - A(t.x.D_x)) = (tD_t - \begin{bmatrix} \rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x) \end{bmatrix})(W(t.x.y)dy)$$

なる行列 $W(t.x.y)dy \in$ $M(m\times m, \hat{\mathcal{D}}(s))$ を構成できる。

$\rho_i(0)$ に関する条件より $W(t.x.y)dy|_{t=0} \in GL(m, \hat{\mathcal{D}}(s))$ も同様である. 正規化して. $(V|_{t=0})(W|_{t=0}) = 1$ としておく.

この時, $V\cdot W = W\cdot V = 1 \ (\equiv \delta(x-y)dy)$ が $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の積の意味で成り立つ. それは. 次の様にして示される.

(3-4), (3-5) より

$$(3\text{-}6)\begin{cases} (tD_t - A(t.x.D_x))(V\cdot W) = (V\cdot W)(tD_t - A(t.x.D_x)) \\ (tD_t - A^0(x))(WV) = (W\cdot V)(tD_t - A^0(x)) \end{cases}$$

$$\left(A^0 = \begin{bmatrix} \rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x) \end{bmatrix} \text{ とおく。} \right)$$

が成り立つ. 更に $VW|_{t=0} = WV|_{t=0} = 1$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$.

tに関するTaylor展開で各t^kの係数を比較する事により，(3-6)の方程式はともに，Cauchyデータによって一意的に決まることがわかる．$(V\cdot W)|_{t=0}=(W\cdot V)|_{t=0}=1$ に注意すると，実は，$V\cdot W=W\cdot V=1$ in $GL(m,\mathcal{D}(\omega))$ の成り立つことが得られる．故にVは可逆であり，(3-4)の変換が実現された．これが［オ2段］である．

以上によって，$k=m$の場合の証明をスケッチした．kが一般の場合も，殆んど同様である．

参考文献

[1] Baouendi-Goulaouic ; Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurfaces ; Comm. Pure. Appl. Math. 1973, 26 455-475.

[2] 田原 ; Fuchs双曲型方程式の研究 : 東京大学修士論文

[3] 田原 ; Fuchs双曲型方程式 ; 数理研講究録 Vol 248, 「超函数と線型微分方程式 IV」 1975, 19-57.

[4] 田原 ; Fuchs双曲型方程式の超函数解の構造 ; 数理研講究録に近刊の予定.