数理解析研究所講究録
第 281 巻 1976 年 192-199

境界値の満たす関係について

東大 理　　片岡清臣

超関数論に於ける非特性境界値問題については、今迄に小松－河合の境界値の定義に始まって、河合－柏原の楕円型境界値問題の理論と、金子の片側双曲型の場合の可解性等の結果がある。しかし双曲型混合問題等に応用するには少し不十分である。そこで本稿では、境界の余次元 1，非特性，単独の場合に限って、ある程度一般論的にできる所を解説する。

§1. 層 $C_{M+|X}$ の定義

M を n 次元実解析的多様体，N をその余次元 1 の部分多様体とする。簡単の為 $M = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x')$　$N = \{x_1 = 0\}$ とする。

$X = M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n \ni (z_1, z')$ ，$Y = N^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{n-1}$，$TX = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j})$

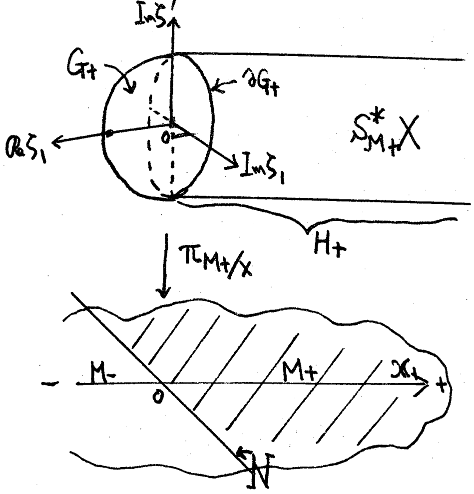
$T^*X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ として pairing を $-\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \zeta_j)$ とする。

（従って ζ に対応する"半分"は $\{\alpha;\ -\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \zeta_j) \geq 0\}$ となる。）

$S^*_{M+}X = \{(z, \zeta) \in S^*_M X \mid \mathrm{Re}\, z_1 > 0\} \cup \{(z, \zeta) \in S^*X \mid z \in N,\ \mathrm{Re}\, \zeta' = 0,\ \mathrm{Re}\, \zeta_1 \geq 0\}$

$G_+ = \{(z, \zeta) \in S^*_N X \mid \mathrm{Re}\, \zeta_1 > 0\}$ ，$\partial G_+ = \{(z, \zeta) \in S^*_N X \mid \mathrm{Re}\, \zeta = 0\} = S^*_M X \cap S^*_N X$

$H_+ = S^*_M X \cap S^*_{M+} X = \{(x, i\eta) \in S^*_M X \mid x_1 \geq 0\}$ と定義する。



$\widetilde{M_+ X}^* = (X - M_+) \sqcup S^*_{M+} X \xrightarrow{\pi_{M+/X}} X$

(M_+を中心としたXの comonoidal 変換。)

$\widetilde{N X}^* \xrightarrow{\pi_{N/X}} X$

<u>Def</u> $\mathcal{H}^q_{S^*_{M+}X}(\pi^{-1}_{M+/X}\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{H}^q_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N/X}\mathcal{O}_X)$ はそれぞれ $q = n$ だけ残るので、$C_{M+|X} \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{H}^n_{S^*_{M+}X}(\pi^{-1}_{M+/X}\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M+/X}$,

$C_{N|X} \underset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{H}^n_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N/X}\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N/X}$

とおくと、これらはすべて座標不変に定義される。

($C_{N|X}$ は河合−柏原によって既に導入されている。)

命題1. $\Gamma_{M+}\mathcal{B}_M|_N \supsetneq \pi_{M+/X *} C_{M+|X}|_N$, $C_{M+|X}|_{\{x_1>0\}} = C_M|_{\{x_1>0\}}$,

$C_{M+|X}|_{G+} = C_{N|X}|_{G+}$, $0 \to \Gamma_N \mathcal{B}_M \to \pi_{N/X *} C_{N|X} \to \mathcal{O}_X|_N \to 0$ (完全)

従って問題なのは∂G_+上であるが、次が成立する。

命題2. $C_{N|X}|_{\partial G+} \xrightarrow{i'} C_{M+|X}|_{\partial G+} \xrightarrow{i} \Gamma_{H+} C_M|_{\partial G+}$ という自然な写像i, i'があり、i'は($S^*_Y X \cap \partial G_+$を除いて)単射ということがわかっている。($i$も単射である事が予想されている。)

そして自然に$C_{M+|X}$, $C_{N|X}$ は$\mathcal{P}_X$−module になっている。

命題3. $C_{N|X}$ (G_+では$C_{M+|X}$も同じだが)は、$S^*_N X - S^*_Y X \ni (x'; \zeta_1, i\eta')$ ($\eta' \neq 0$). とするとある対応により(自然ではないが) x'とζ_1

を変数とする microfunction で，ς_1を正則パラメータとするものと同一視される為，特にς_1について一意接続性が成立する。そしてそれの∂G_+までの一般化として，

$$i\,(\,\Gamma_{H_+}\, C_{M+|X}|_{\partial G_+}) = 0$$ が成立する。

§2．小松－河合の境界値

$P(x, D_x)$ を m 階微分作用素で，N は非特性とする。$u(x)$を$\{x_1>0\}$での超関数解（N に近い所で定義されていればよい。）とすると，$\exists_1\, \tilde{u}(x) \in \Gamma_{M_+}(\mathcal{B}_M)$，$\exists_1\, f_0(x'), \ldots, f_{m-1}(x') \in \mathcal{B}_N$ s.t. $\tilde{u}|_{x_1>0} = u$，$P\tilde{u}(x) = f_0(x')\delta(x_1) + \cdots + f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$

（$f_0, \ldots, f_{m-1}$ を小松－河合の境界値という。）

そこで u を考える代りに$\tilde{u}$，又は $(f_0, \ldots, f_{m-1})$ を考える事ができる。ところで $u(x) \longrightarrow (f_0, \ldots, f_{m-1})$ の対応は 1：1 であるが P が双曲型の場合を除けば一般に onto ではない。そこでこの image を決める事が重要であるが，Cauchy-Kowalevsky の定理より，$\mathcal{A}$での Cauchy 問題の可解性があるので，その image に対する条件は $\mathcal{B}_N^m/\mathcal{A}_N^m \cong \pi_* \mathcal{C}_N^m$ に対する条件になる。

そこでこの問題に$\mathcal{C}_{M+|X}$ を応用する。まず $\tilde{u}(x) \in \Gamma_{M_+}\mathcal{B}_M|_N$ という事から$\tilde{u}$は $\mathcal{C}_{M+|X}$ の $S^*_{M+|X}$ 上の section と同一視できる。また，$F = f_0(x')\delta(x_1) + \cdots + f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$ も $\mathcal{C}_{M+|X}$ の section，又はより厳密に $\mathcal{C}_{N|X}$ の section と同一視できる。よって $P\tilde{u}(x) = F(x)$ という方程式は，$\overline{G_+} = G_+ \cup \partial G_+$ 上での $\mathcal{C}_{M+|X}$，$\mathcal{C}_{N|X}$ の section 間

の方程式として捉えられる。$\overline{G_+}\setminus\{\sigma_m(p)=0\}$ では $\tilde{u}=P^{-1}F(x)$ として定まり問題はないが、さらに $\tilde{u}$ が $\{\sigma_m(p)=0\}\cap\overline{G_+}$ までも $\mathcal{C}_{M+1|X}$ の section として拡張される（$P\tilde{u}=F$ を満たしながら）為には、$(f_0\ldots f_{m-1})$ が任意では一般にはだめである。しかし $G_+\cap\{\sigma_m(p)=0\}$ までに拡張される為の必要十分条件は、完全にわかり、$f_0,\ldots,f_{m-1}$ の間の Ψ.D.O 方程式であらわせる。

定理1. $\tau^+ ;\ \overline{G_+}\setminus S^*_YX = S^*_NX\cap S^*_{M+}X - S^*_YX \longrightarrow S^*_NY = iS^*N$ (proj.) とした時、$\forall(x_0', i\eta_0')\in iS^*N$ に対して、$\tau^{+-1}(x_0',i\eta_0')\cap G_+\cap\{\sigma_m(p)=0\}$ が重複度も込めてちょうど m' 個の点からなっているとすると、$(0\leq m'\leq m)$、$P\tilde{u}(x)=F(x)$ が $\{\sigma_m(p)=0\}\cap G_+\cap\tau^{+-1}(x_0',i\eta_0')$ で可解である為の必要十分条件は（$\tilde{u}$ は存在すれば命題3より一意）P に対して定まるある Ψ.D.O からなる Matrix による $f_{m'},\ldots,f_m$ の（$\mathcal{C}_N^{m-m'}|_{(x_0',i\eta_0')}$ の germ として）像で $f_0,\ldots,f_{m'-1}$ がかけることである。
（$\mathcal{C}_N^{m'}|_{(x_0',i\eta_0')}$ の germ として）

実際この Ψ.D.O を具体的な留数計算で上の symbol から順に求める事ができるが省略する。

次に問題なのは、$\partial G_+\cap\{\sigma_m(p)=0\}$ 上での可解性であるが、$(S^*_YX\cap\{\sigma_m(p)=0\}=\phi)$、micro local に片側双曲型に当る場合は Cauchy 問題が解けるので $f_0\ldots f_{m-1}$ に対して無条件に $P\tilde{u}=F$ は解ける。（もちろん $\tilde{u}\in\mathcal{C}_{M+1|X}$ として）

即ち次が成立する。

定理2 (金子)

$\{\sigma_m(P)=0\}\cap\partial G_+\ni(0,x_0';i\eta_0)$ の S^*X における近傍 U が存在して、$\{(z,\zeta)\in U \mid z\in M_+,\ \mathrm{Im}\,\zeta'=0,\ \mathrm{Re}\,\zeta_1>0\}\cap\{\sigma_m(P)=0\}=\phi$ ならば $P\tilde{u}=F$ は $(0,x_0';i\eta_0)$ で無条件に解ける。$(\tilde{u}\in C_{M_+|X})$

(このような $\tilde{u}$ は ∂G_+ 上では $C_{M_+|X}$ の germ としてはわからないが少くとも命題3より C_M の元としては一意。)

従って問題なのは、Th 1, 2 とも成立しないような境い目の所であるが、そのような所は回折現象などの起こる所で、境界値の間の関係は一般には micro-local operator をもってしてもかけない事が予想されている。

(注) 楕円型の場合は $\partial G_+\cap\{\sigma_m(P)=0\}=\phi$ であるので定理1だけで完全にわかる。定理2の例は $P=D_{x_1}^2-x_1D_{x_2}^2$ など。

§3. 非特性境界値問題の超局所的一般化

一般に同次境界値問題とは、境界値の間にいくつかの微分方程式を課して、境界値がそれらの方程式を満たす様な P の $x_1>0$ での解をすべて求める事である。そこで境界値 $(f_0,\dots,f_{m-1})$ $\leftrightarrow$ $F=f_0(x')\delta(x_1)+\cdots+f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$ というように $C_{N|X}$ の section としてとらえ、解 $u(x)\leftrightarrow\tilde{u}(x)\in\pi_{M_+/X*}C_{M_+|X}$ としてとらえる事によって問題を $S^*_NY=iS^*N$ 上に超局所化できる。

(S^*_YX は非特性としているので無視できる。)

つまり　ι^+ ; $\overline{G_+}\setminus S^*_YX = S^*_{M+}X \cap S^*_NX - S^*_YX \longrightarrow S^*_NY = iS^*N$

ι ; $S^*_NX - S^*_YX \longrightarrow S^*_NY = iS^*N$

として，$\iota_*\mathcal{P}_X$，$\iota_*C_{N|X}$，$\iota^+_*C_{M+|X}$ という iS^*N 上の sheaf を考える。

Def　$\iota_*\mathcal{P}_X^f \ni P(x, D)$ が non-char. とは　$P \neq 0$ であって，

$\{\sigma(p) = 0\} \cap (S^*_NX - S^*_YX) \xrightarrow{\iota} iS^*N$ が proper map のこと。

特に fiber は有限個で重複度も込めて一定 $= m$ なので，それを P の本質的階数という事にする。non char. のものは明らかに $\iota_*\mathcal{P}_X^f$ の積について閉じている。

Lemma　（小松一河合の境界値の一般化）

$\iota_*\mathcal{P}_X^f \ni P(x, D_x)$; non char. に対して，本質的階数を m とすると，　$\iota_*C_{N|X} = P(\iota_*C_{N|X}) \oplus \sum_{j=0}^{m-1} C_N \cdot \delta^{(j)}(x_1)$

又は　$\iota_*C_{N|X} / P(\iota_*C_{N|X}) \cong C_N^m$

Def　$P \in \iota_*\mathcal{P}_X^f$; non char.　この時　$P(\iota_*C_{N|X}) \subset \mathcal{F} \subset \iota_*C_{N|X}$ なる subsheaf $\mathcal{F}$ が B 型とは，

(B)…　$\mathcal{F}/P(\iota_*C_{N|X}) \hookrightarrow \iota_*C_{N|X}/P(\iota_*C_{N|X}) \cong C_N^m$ として C_N^m の部分層と考えた時，$\exists Q(x', D_{x'})$; $C_N^m \longrightarrow \exists C_N^l$ （Q は有限階 P.D.O. の Matrix ）s.t.　$\mathcal{F}/P(\iota_*C_{N|X}) \cong \mathrm{Ker}Q$ とかけること。

Def　(φ_M, φ_N) ; $(T^*X, T^*Y) \longrightarrow (T^*X, T^*Y)$ はそれぞれ複素接触変換で

① φ_N ; $S^*_NY \hookrightarrow S^*_NY$,　φ_M ; $S^*_MX \hookrightarrow S^*_MX$

② φ_M ; $S^*_NX - S^*_YX \hookrightarrow S^*_NX - S^*_YX$

② $\iota\circ\varphi_M|S^*_NX-S^*_YX=\varphi_N\circ\iota$

を満たすとし，φ_N が $S^*_NY\supset U$ の近傍で定義されている時，φ_M は $\iota^{-1}(U)$ の近傍で定義されているとする。

以上のような条件を満たす (φ_M,φ_N) をB型の変換と呼ぶ。

(注) T^*X の複素接触変換 φ_M で S^*_MX，$\pi^{-1}(N)$ を不変にするものを与える事とB型の変換を与える事は同値である。

命題　B型の変換 (φ_M,φ_N) に対して，量子化された接触変換 (Φ_M,Φ_N) が存在して，$\iota_*^+C_{M+|X}\xrightarrow{\Phi_M}\iota_*^+C_{M+|X}$，$\iota_*C_{N|X}\xrightarrow{\Phi_M}\iota_*C_{N|X}$ $C_N\xrightarrow{\Phi_N}C_N$ という $\iota_*\mathcal{P}_X$－module としての層同型が成立し，Φ_M と Φ_N は $\iota_*C_{N|X}$ の境界値をとる操作（P を1つ決めた時）と両立し，$\mathcal{F}$ がB型ならば $\iota_*\mathcal{F}$ もB型になる。

（これは $C_{M+|X}$ の所でまだ厳密には証明できていないが正しい根拠は十分ある。）

以上の準備の下で境界値問題を一般化すると，

"$P\in\iota_*\mathcal{P}^f_X$；non. char.　$\mathcal{F}$；B型の $\iota_*C_{N|X}$ の部分層を与えて，$\{u\in\iota_*^+C_{M+|X}\mid Pu\in\mathcal{F}\}$ を求める事。" となる。

実例として回折現象に当る境界値問題は，B型の変換により，generic には，

$P=D_1^2-(x_1-x_2)A(x,D')$　；A は2階の Ψ.D.O で D_1 を含まず．$\sigma_2(A)=\{\lambda(x,\xi')\}^2$，$\frac{1}{i}\lambda(x,i\eta')>0$　となる。

参考文献

[1] 柏原－河合．楕円型境界値問題について．数理研(1973)

[2] 金子．On Continuation of Regular Solutions of P.D.E. with Real Analytic Coefficients．数理研講究録 (1975, 7)

[3] 小松－河合．Boundary values of hyperfunction solutions of L.P.D.E．Publ. Res. Inst. Math. Sci., 7 (1971)

[4] 森本　超函数の台と特異台（佐藤予想と層 CNIX）数理研講究録，168 (1972)，28～59．

[5] 佐藤－柏原－河合．Microfunctions and Pseudo Differential equations，Lecture Notes in Math. No. 287，Springer，1973.