数理解析研究所講究録
第 282 巻 1976 年 32-44

Periodic Time Dependent Dynamical Systemについて

名大　教養部　池上宜弘

§0. 序論. 自励系でない常微分方程式に対する定性的理論の研究はほとんど行われていないのが現状のように思われる. この小論におけるこころみは, 自励系でない周期的な常微分方程式を定性的にしらべることである. 定理1は周期軌道の性質に関するものであり, 定理2,3,4はある種の安定性に関するものである. 定理2,3,4は自励系方程式の Ω-stabity theory を利用する事により証明される.

§1. 定義・基本的性質. time dependent dynamical system とは,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad x \in M, \ t \in \mathbb{R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

の形の方程式をいう. 以後, Mは境界を持たない compact manifold とする. (1)は次の様なM×ℝ上のベクトル場Xと対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x,t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}) \cdots (2).$$

<u>定義</u> X, Y を time dependent dynamical system とする．X, Y が <u>R-equivalent</u> であるとは，次の様な同相写像 $h: M\times\mathbb{R} \to M\times\mathbb{R}$ が存在することである；(i) h は X と Y の topological equivalence である，(ii) $\pi_M: M\times\mathbb{R}\to M$ を第1成分への全射とするとき，同相写像 $h_0: M\to M$ が存在して，$h_0\circ\pi_M = \pi_M\circ h$ を満す．

<u>注意</u> 1．任意の X, Y に対して，上の条件 (i) のみをみたすような h は常に存在する．X, Y を M 上の自励系とし $\tilde{X}_{(x,t)} = (X_x, 1)$ $\tilde{Y}_{(x,t)} = (Y_x, 1)$ を $M\times\mathbb{R}$ 上のベクトル場とする．このとき，$\tilde{X}, \tilde{Y}$ が R-equivalent ならば X, Y は topologically equivalent である．

<u>定義</u> 系 (1) が $f(x, t) = f(x, t+1)$ をみたすとき，この dynamical system は<u>周期1を持つ</u>という．M 上の周期1を持つ C^r 級の time dependent dynamical system 全体が作る集合を $\mathbb{P}^r(M\times\mathbb{R})$ で示す．

<u>定義</u> X, Y が <u>P-equivalent</u> であるとは，$h(x, t+1) = (\pi_M\circ h(x,t), \pi_{\mathbb{R}}\circ h(x,t) + 1) \in M\times\mathbb{R}$ をみたす R-equivalence h が存在することである．ここに，$\pi_{\mathbb{R}}: M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は第2成分への全射である．

<u>定義</u> $\mathbb{P}^r(M\times\mathbb{R})$ には $M\times\mathbb{R}$ 上のベクトル場の空間として，uniform C^r topology を入れる．

<u>注意</u> 2．$\mathbb{P}^r(M\times\mathbb{R})$ に Whitney C^r topology を入れると discrete topology となる．

§2. $\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$と$\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$. 円$S^1$を$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$と考える. $(x, s)\in M\times S^1$に対して, $T_{(x,s)}(M\times S^1)\approx T_x(M)\times T_s(S^1)$である. $\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$を$M\times S^1$上の$C^r$ vector field全体の作る集合にC^r-topologyを入れて得られる空間とし, 次の様な$\mathfrak{X}^r(M\times S^1)$の部分空間を考える.

$$\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)=\{\bar{X}\in\mathfrak{X}^r(M\times S^1)\mid \bar{X}_{(x,s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{成分は } 1.\}.$$

$\rho: M\times\mathbb{R}\to M\times S^1$を$\rho(x,t)=(x,t)\in M\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$により定義すると, ρより写像$\rho_*: \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})\to\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$が自然に得られる. すなはち, $\rho_*(X)=\bar{X}$, $X_{(x,t)}=(f(x,t), 1)\in T_x(M)\times T_t(\mathbb{R})$とするとき, $\bar{X}_{(x,t)}=(f(x,t), 1)\in T_x(M)\times T_t(S^1)$.

<u>定義</u>. $\bar{X},\bar{Y}\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$が<u>$S^1$-equivalent</u>であるとは, 次の条件(i)(ii)をみたす同相写像$h: M\times S^1\to M\times S^1$が存在することである; (i) $\bar{X}$の任意の軌道は$\bar{Y}$の1つの軌道上に方向を保って写される, (ii)同相写像$h_0: M\to M$が存在して, $h_0\pi_M=\pi_M h$となる, (iii)次のようなisotopy $H_s: M\times S^1\to M\times S^1$が存在する; (a) $H_0=h$, S^1の基点$*$に対して$H_1(M\times *)=M\times *$, (b)任意の$s\in[0,1]$に対してH_sは$\bar{X}$と$\bar{Y}$のtopological equivalenceである.

<u>Lemma</u> 1. $X, Y\in\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$, $\bar{X}=\rho_*(X)$, $\bar{Y}=\rho_*(Y)$とするとき, X, YがP-equivalentであるのは$\bar{X},\bar{Y}$がS^1-equivalentであるときに限る.

(証明の概略) hをX, YのP-equivalenceとするとき, 次の

条件をみたす isotopy $\tilde{H}_s: M\times R \to M\times R$ が存在する；(i) $\tilde{H}_0 = h$, $\tilde{H}_1(M\times n) = M\times n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (ii) $\tilde{H}_s(x, t+1) = (\pi_M \tilde{H}_s(x,t), \pi_R \tilde{H}(x,t) + 1) \in M\times \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall s \in [0,1]$, (iii) 任意の $s\in[0,1]$ に対し，$\tilde{H}_s$ は X, Y の topological equivalence. この $\tilde{H}_s$ により上のような isotopy $H_s: M\times S^1 \to M\times S^1$ が存在することが分る．従って $\bar{X}, \bar{Y}$ は S^1-equivalent となる．逆は covering $\rho\times id: M\times\mathbb{R}\times[0,1] \to M\times S^1 \times [0,1]$ を使えば簡単に証明される．

Lemma 2. $\rho_*: \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R}) \to \mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ は同相写像である．

§3. $X \in \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ の周期軌道. X を M 上の time dependent dynamical system とし，φ_s を X の flow とする．

定義. X の軌道 γ が周期軌道であるとは，実数 σ が存在して，任意の点 $(x,t)\in\gamma$ に対して $\pi_M \varphi_\sigma(x,t) = \pi_M(x,t)$ が成立することである．この様な σ の最小正数を γ の周期という．

以後，X として，周期 1 を持つものを考える．

注意 3. $\pi_M(\gamma)$ が単純閉曲線でないような周期軌道 γ を持つ system X が存在する．特に $\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ の中に存在する．

注意 4. 無理数を周期とする周期軌道を持つ X が $\mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$ に存在する．

Theorem 1. $X \in \mathcal{P}^r(M\times\mathbb{R})$, $r \geq 1$ とする．X の軌道 γ が無理数の周期 σ を持つならば，

(i) $\pi_M(\gamma)$ は単純閉曲線であり,

(ii) $\pi_M(\gamma)\times\mathbb{R}\subset M\times\mathbb{R}$ の任意の点 (x, t) に対し, (x, t) を通る軌道は $\pi_M(\gamma)\times\mathbb{R}$ に含まれ, 周期 σ を持つ周期軌道である.

(証明) $\bar{X}=\rho_*(X)\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ とし, $\varphi, \bar{\varphi}$ を各々 $X, \bar{X}$ の flow とすれば, $(x_0, t_0)\in M\times\mathbb{R}$ に対して, 次の式が成立する:

$$\begin{aligned}\pi_M\circ\varphi_t(x_0, t_0) &= \pi_M\circ\rho\circ\varphi_t(x_0, t_0)\\ &= \pi_M\circ\bar{\varphi}_t(x_0, [t_0]),\end{aligned}$$

但し, 最後の π_M は全射 $M\times S^1\to M$ であり, $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなしたとき, $[t_0]\in S^1$ は t_0 を含む類である. γ の中の任意の点 (x_0, t_0) に対して,

$$\varphi_t(x_0, t_0)=\varphi_{t+s}(x_0, t_0)$$

をみたす正整数 s の最小数が σ である. $\rho(\gamma)=\bar{\gamma}$ は $\bar{X}$ の軌道である. $\bar{\gamma}$ に含まれる点 $\rho(x_0, t_0)=(x_0, [t_0])$ を p とおけば, $x_0\times S^1$ 上には $\{\bar{\varphi}_{n\sigma}(p)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ が稠密に存在する. 今, $0<\tau<\sigma$ なる τ が存在して,

$$\pi_M\bar{\varphi}_\tau(p)=x_0\ (=\pi_M(p))$$

であると仮定する. $\bar{\varphi}_\tau(p)=q$ とおけば, 数列 $\{n_i\}\subset\mathbb{Z}$ が存在して,

$$\lim_{i\to\infty}\bar{\varphi}_{n_i\sigma}(p)=q$$

となる．故に，

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_s(q) &= \bar{\varphi}_\sigma \bar{\varphi}_\tau(p)\\ &= \bar{\varphi}_s \lim_{i\to\infty} \bar{\varphi}_{n_i\sigma}(p)\\ &= \lim_{i\to\infty} \bar{\varphi}_s \bar{\varphi}_{n_i\sigma}(p).\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}\pi_M \bar{\varphi}_s(q) &= \lim_{i\to\infty} \pi_M \bar{\varphi}_s \bar{\varphi}_{n_i\sigma}(p)\\ &= \pi_M \bar{\varphi}_s(q).\end{aligned}$$

故に，

$$\pi_M \bar{\varphi}_\tau(\bar{\varphi}_s(p)) = \pi_M \bar{\varphi}_s(p)$$

が成立する．この式より

$$\varphi_\tau \varphi_s(x_0, t_0) = \varphi_s(x_0, t_0)$$

を得るが，$\varphi_s(x_0, t_0)$ は γ の任意の点としてよい．一方 $0<\tau<\sigma$ であるから，上の式は σ が γ の周期であることに矛盾する．故に，$p\in\gamma$ に対して，$t\longmapsto \pi_M\circ\varphi_t(p)$ により定義される写像 $[0,\sigma]\longrightarrow M$ の像 C は単純閉曲線である．これは (i) が成立していることを示している．同様な方法で，(ii) も成立することが証明される．（証明終）

§4. Non wandering set. $X\in \mathcal{P}^r(M\times R)$ とし，φ_t を

X の flow とする.

定義 次の条件を持つ $x \in M$ を X の non-wandering point と呼ぶことにする; $t_0 \in \mathbb{R}$ が存在して, 点 (x, t_0) の $M \times t_0$ における任意の開近傍 U と任意の自然数 n に対して, $|t_n| > n$ なる実数 t_n が存在して $U_{t_n} \cap \varphi_{t_n}(U) \neq \phi$ となること. ただし, $U_t = \{(y, t_0 + t) \in M \times \mathbb{R} \mid (y, t_0) \in U\}$. X の non-wandering point 全体からなる集合 $\omega(X)$ を non-wandering set という.

定義 $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$ を次の条件を持つ点 (x, t) 全体からなる集合とする; (x, t) の $M \times t$ における任意の開近傍 U と任意の自然数 n に対して, $|m| > n$ なる整数 m が存在して, $U_m \cap \varphi_m(U) \neq \phi$ となること. ただし, $U_m = \{(y, t+m) \in M \times \mathbb{R} \mid (y, t) \in U\}$.

定義 X を $M \times S^1$ 上の力学系(自励系)とする. ($X \in \mathfrak{X}^r(M \times S^1)$).
X の(普通の意味での) non-wandering set を $\Omega(X)$ であらわす.
$\pi_M(\Omega(X)) = \omega(X)$ とおく.

Proposition 1. $\omega(X) = \pi_M(\tilde{\Omega}(X))$. 又, $\bar{X} = \rho_*(X)$ とするとき, $\omega(X) = \omega(\bar{X})$ である.

Proposition 2. $\tilde{\Omega}(X) = \rho^{-1}(\Omega(\bar{X}))$. 従って, $\tilde{\Omega}(X)$ は X の invariant set である.

Proposition 3. $\omega(X) \subset M$, $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$ は閉部分集合で

ある．

これ等の性質からみても，$\omega(X)$や$\tilde{\Omega}(X)$について研究することは意義の深いことと思われる．

<u>定義</u>　$X, Y \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$が<u>$\tilde{\Omega}\omega$-equivalent</u>であるとは，次の条件(i)(ii)(iii)をみたす同相写像$h : \tilde{\Omega}(X) \to \tilde{\Omega}(Y)$が存在することである．

(i)　hは$\tilde{\Omega}(X)$の軌道を$\tilde{\Omega}(Y)$の軌道に方向を保ってうつす．

(ii)　同相写像$h_0 : \omega(X) \to \omega(Y)$が存在して，次の図が可換である．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}(X) & \xrightarrow{h} & \tilde{\Omega}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_M} \\ \omega(X) & \xrightarrow{h_0} & \omega(Y) \end{array}$$

(iii)　$h(x, t+1) = (\pi_M h(x, t), \pi_R h(x, t) + 1)$.

上の(i)(ii)(iii)と次の(iv)をみたすhが存在するとき，X, Yは<u>level preservingly $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent</u>であるという．

(iv)　単調増加な同相写像$\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$が存在して，次の図が可換となる．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}(X) & \xrightarrow{h} & \tilde{\Omega}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_R} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_R} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{R} \end{array}$$

実用的に，上の(i)(iii)だけをみたすequivalenceが重要と

なる場合も多いと思われる．このような場合は，$\rho_*(X)=\bar{X}$，$\rho_*(Y)=\bar{Y}$ の Ω-equivalence の問題に帰着されるから，現在までにSmaleをはじめとする人々により研究されて来た理論を，そのまま適用すればよい．

<u>定義</u> $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ が <u>$\Omega\omega$-equivalent</u> であるとは，次の条件をみたす同相写像 $h: \Omega(\bar{X}) \to \Omega(\bar{Y})$ が存在することである；

(i) h は $\Omega(\bar{X})$ の軌道を $\Omega(\bar{Y})$ の軌道に方向を保って写す．

(ii) 同相写像 $h_0: \omega(\bar{X}) \to \omega(\bar{Y})$ が存在して次の図が可換である．

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h} & \Omega(\bar{Y}) \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_M \\ \omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h_0} & \omega(\bar{Y}) \end{array}$$

(iii) 次の条件をみたす isotopy $H_s: \Omega(\bar{X}) \to \Omega(\bar{Y})$ が存在する；(a) $H_0 = h$，$H_1(\Omega(\bar{X}) \cap (M \times *)) = \Omega(\bar{Y}) \cap (M \times *)$，$*$ は S^1 の基点，(b) H_s は $\bar{X}|\Omega(\bar{X})$ と $\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$ の topological equivalence である．($\forall s \in [0,1]$)

上の (i)(ii)(iii) と次の (iv) をみたす h が存在するとき，$\bar{X}, \bar{Y}$ は <u>level preservingly $\Omega\omega$-equivalent</u> であるという．

(iv) 方向を保つ同相写像 $\tau: S^1 \to S^1$ が存在して，次の図が可換となる．

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h} & \Omega(\bar{Y}) \\ \downarrow \pi_{S^1} & & \downarrow \pi_{S^1} \\ S^1 & \xrightarrow{\tau} & S^1 \end{array}$$

<u>Lemma 1'</u>. $\bar{X}=\rho_*(X)$, $\bar{Y}=\rho_*(Y)$ とするとき, X, Y が $\tilde{\Omega}\omega$-equivalent ならば, $\bar{X}, \bar{Y}$ は $\Omega\omega$-equivalent である.

<u>定義</u> 空間 $\mathfrak{X}$ と, $\mathfrak{X}$ の要素の間の equivalence $\sim$ に対して, $\mathfrak{X}$ の要素 x が <u>$\sim$-stable</u> であるとは, x の近傍 $N\subset\mathfrak{X}$ が存在して, N の任意の要素 y に対して, $x\sim y$ が成立することをいう. これにより, $\mathfrak{P}^r(M\times R)$ の要素 X に対して <u>$C^r\tilde{\Omega}\omega$-stability</u>, <u>level preserving $C^r\tilde{\Omega}\omega$-stability</u> が定義され, $\bar{X}\in\mathfrak{X}_1^r(M\times S^1)$ に対して, <u>$C^r\Omega\omega$-stability</u> が定義される.

Lemma 1' と Lemma 2 より次の lemma を得る.

<u>Lemma 3</u>. X が $C^r\tilde{\Omega}\omega$-stable ならば $\rho_*(X)=\bar{X}$ は $C^r\Omega\omega$-stable である.

<u>Theorem 2</u>. $X\in\mathfrak{P}^1(M\times R)$ が $C^1\tilde{\Omega}\omega$-stable ならば次が成立する:

(i) $\rho_*(X)=\bar{X}$ は $C^1\Omega\omega$-stable, 従って $C^1\Omega$-stable である.

(ii) $\dim M\geqq 3$ のとき, $\pi_M|\Omega(\bar{X})$ は embedding であり,

(ii') $\dim M=2$ のとき, $\Omega(\bar{X})$ の任意の軌道 γ に対して, $\pi_M|\gamma$ は正則写像で, $\pi_M|\Omega(\bar{X})$ は3重点を持たず, $\pi_M|\Omega(\bar{X})$ の self intersection において, 軌道は transversal に交わる.

<u>Corollary</u>. 周期が無理数の周期軌道を $X\in\mathfrak{P}^r(M\times R)$ が持つならば, X は $C^1\tilde{\Omega}\omega$-stable ではない.

これは, Theorem 1 と Theorem 2 より出る結果である.

Theorem 3. $\tilde{\Omega}(X)$, 従って $\Omega(\bar{X})$, が有限個の軌道しか持たない場合は，次の条件のもとでは X は $C^r\tilde{\Omega}\omega$-stable である．($r \geqq 1$).

(i) $\Omega(\bar{X})$ が双曲型集合で $\bar{X}$ は no-cycle property を持つ．

(ii). Theorem 2 の (ii) 又は (ii′) が成立する．

Theorem 4. $\tilde{\Omega}(X)$, 従って $\Omega(\bar{X})$, が有限個の軌道しか持たない場合は，次の条件のもとで，X は level preservingly C^r $\tilde{\Omega}\omega$-stable である．($r \geqq 1$)

(i), (ii)： Theorem 3 の条件と同様．

(iii) $\dim M = 2$ の場合．$\pi_M|\Omega(\bar{X})$ の self-intersection の原像は $\pi_{S^1}: M \times S^1 \to S^1$ により S^1 の中に 1 対 1 に写つされる．

Theorem 2 の証明には次の一連の lemma を使う．

Lemma 4. $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ に対し，$h: \Omega(\bar{X}) \to \Omega(\bar{Y})$ を $\Omega\omega$-equivalence とし，γ を $\bar{X}$ の閉軌道で周期を m とすれば，$h(\gamma)$ も周期 m を持つ $\bar{Y}$ の閉軌道である．

Lemma 5. $\bar{X} \in \mathfrak{X}_1^1(M \times S^1)$ が $C^1\Omega\omega$-stable ならば，$\Omega(\bar{X})$ の中には閉軌道が稠密に存在し，各閉軌道は双曲型である．

(証明) $\Omega\omega$-stable ならば Ω-stable であるから，general density theorem (Pugh) と Franks の結果により明らか．

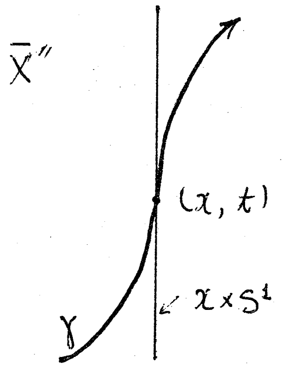
Lemma 6. 次の性質を持つ $\bar{X}$ は $\mathfrak{X}_1^r(M \times S^1)$ の中に稠密に

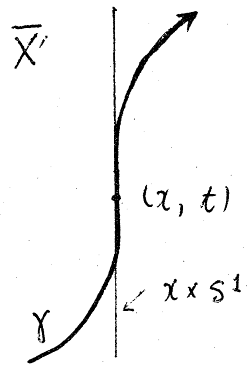
存在する; $\bar{X}$ の任意の軌道の任意の開区間は $x\times S^1$ と平行にならない, $\forall x\in M$.

証明は transversality theory を使って行う.

<u>Lemma 7.</u> $\bar{X}$ が $C^1\Omega w$-stable ならば, 任意の $(x,t)\in\Omega(\bar{X})$ に対して $\bar{X}_{(x,t)}$ の $T_x(M)$ 成分は 0 にならない.

(証明) $(x,t)\in\Omega(\bar{X})$ が存在して, $\bar{X}_{(x,t)}$ の $T_x(M)$ 成分が 0 であるとする. $\bar{X}$ の perturbation $\bar{X}'$ が存在して, (x,t) を通る軌道の (x,t) を含む区間が $x\times S^1$ に含まれる. 一方, Lemma 6 により, Lemma 6 の条件をみたす $\bar{X}''$ が $\bar{X}$ の近くに存在する. $\bar{X}'$ と $\bar{X}''$ は Ωw-equivalent にはならない. (下図)





参考文献

[1] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. A.M.S., 158 (1971), 301–308.

[2] C. C. Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math., 89 (1967), 1010–1021.