数理解析研究所講究録
第282巻 1976年 63-72

ある種の4階Fuchs型常微分方程式系のmonodromy群と既約性条件について

佐々井崇雄（都立大・理）

次の4階systemを考える。

(#)
$$\left[tI-\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4\end{pmatrix}\right]\frac{dx}{dt}=Ax$$

Iは4次の単位行列。$\lambda_1=\lambda_2$。$A=(a_{ij})$は4×4定数行列。xは4次のベクトル。更に以下の仮定を設ける。

(A-1). $|A-\rho I|=(\rho_1-\rho)^2(\rho_2-\rho)^2$ かつAは対角化可能。

(A-2). a_{ii}, $a_{jj}-a_{kk}$ $(j\neq k)$, ρ_ℓ, $\rho_1-\rho_2$ は整数でない。従って、解は$\log$を含まない。

この方程式はRiemann球上、4つの確定特異点$t=\lambda_1=\lambda_2$, λ_3, λ_4, ∞をもつFuchs型方程式で、各点での特性指数は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 = \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \infty \\ a_{11} & 0 & 0 & \rho_1 \\ a_{22} & 0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & a_{33} & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & a_{44} & \rho_2 \end{array} \right\}$$

である。又．Fuchs の関係式は

<u>Prop. 1</u>. $\sum_{j=1}^{4} a_{jj} = 2(\rho_1 + \rho_2)$． $e_j = \exp(2\pi i a_{jj})$．
$f_j = \exp(2\pi i \rho_j)$ とかくと、この式は又

$$\prod_{j=1}^{4} e_j = (f_1 f_2)^2.$$

とも書ける。

Proof. 単なる．A の trace の不変性．である。

<u>Prop. 2</u>. B を不変にする最も一般な行列 T （$TBT^{-1} = B$）は．$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ （ここに．T_1 は 2 × 2 non-singular constant matrix. T_2 は 2 × 2 non-singular constant diagonal matrix ）で表わされる。

<u>Prop. 3</u>. この T を適当に選べば．A の成分のうち $a_{12} = a_{21} = 0$ ，残りのうち 0 でないもの 3 つは．任意の値を

とらすことが出来る。

これによって、(♯)を考える時 $a_{12} = a_{21} = 0$ の場合を考えれば良いことがわかった。以下では系(♯)が accessary parameter を持たない事を示す。

<u>Prop. 4.</u> 仮に a_{4j} $(j=1,2,3)$ は non-zero とする。その時、a_{kl} $(k \neq l)$ は対角要素 a_{ii}，固有値 ρ_m そして a_{4j} を用いて次のように表わされる。

(1) $$a_{13} = \frac{(a_{11}-\rho_1)(a_{11}-\rho_2)}{a_{11}-a_{22}} \cdot \frac{a_{43}}{a_{41}} .$$

(2) $$a_{14} = \frac{(a_{11}-\rho_1)(a_{11}-\rho_2)}{a_{22}-a_{11}} \cdot (a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2) \cdot \frac{1}{a_{41}} .$$

(3) $$a_{23} = \frac{(a_{22}-\rho_1)(a_{22}-\rho_2)}{a_{22}-a_{11}} \cdot \frac{a_{43}}{a_{42}} .$$

(4) $$a_{24} = \frac{(a_{22}-\rho_1)(a_{22}-\rho_2)}{a_{11}-a_{22}} \cdot (a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2) \cdot \frac{1}{a_{42}}$$

(5) $$a_{31} = (a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2) \cdot \frac{a_{41}}{a_{43}}$$

(6) $$a_{32} = (a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2) \cdot \frac{a_{42}}{a_{43}}$$

(7) $a_{34} = (a_{11}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)(a_{22}+a_{33}-\rho_1-\rho_2)\cdot\frac{1}{a_{43}}$.

Proof. まず(A-1)によって $\mathrm{rank}(A-\rho_j I)=2$ $(j=1,2)$ である。従って $A-\rho_j I$ の16ケの3次小行列式は全て0でなくてはならない。この事から ρ_1, ρ_2 を共通根としてもつ、4個の2次方程式(ρに関する)を得る。

$$\text{(i)}\quad \det\begin{bmatrix} a_{11}-\rho & 0 & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

$$\text{(ii)}\quad \det\begin{bmatrix} 0 & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

$$\text{(iii)}\quad \det\begin{bmatrix} a_{11}-\rho & 0 & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-\rho \end{bmatrix} = 0.$$

$$\text{(iv)}\quad \det\begin{bmatrix} 0 & a_{22}-\rho & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44}-\rho \end{bmatrix} = 0.$$

これに根と係数の関係を適用し、Prop. 1 に注意しながら計算することで、所要の関係式7つを得る。

Theorem 5. (#) は accessary parameter を持たぬ。

Proof. 特性指数 a_{ii}, ρ_j を与えて、A が定まるかという事だが、まず、$a_{12}=a_{21}=0$. 対角要素は指数そのものであり、3つは任意の値を指定できる。残り7つは Prop. 4 で定まる。これは勿論 $a_{4k}\neq 0$ ($k=1,2,3$) の場合だが、そのうち少なくも一つが0の時も、定める方法は Prop. 4 と同じである。

ここで、接続問題に於ける大切な公式を述べておく。これは大久保氏 [1] によって、より一般な case に於いて証明されたもので、古典的な超幾何方程式論で登場する Gauss の公式の一般化である。

Theorem 6. (Gauss-大久保の公式) 系 (#) は4つの有限な特異点 $t=\lambda_1\,(=\lambda_2)$、$\lambda_3$, λ_4 に於いて定義され、それぞれの特性指数 a_{jj} と、初めの係数に対する正規化条件 $g_j(0)=\varepsilon_j$ (ただし、ε_j は4-vector で、j 番目の成分のみ1、他は全て0のもの) に対応する、4つの unique singular solution $X_j(t)$ ($j=1,2,3,4$) をもつ。

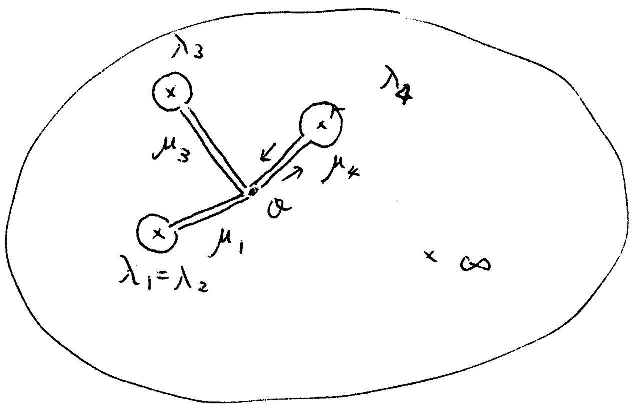
$$X_j(t) = (t-\lambda_j)^{a_{jj}} \sum_{m=0}^{\infty} g_j(m)(t-\lambda_j)^m.$$

更に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \infty\}$ の任意の単連結領域に於いて、それらの Wronskian は

$$\det X = \frac{\prod_{j=1}^{4}\left[(t-\lambda_j)^{a_{jj}}\,\Gamma(a_{jj}+1)\right]}{\left[\Gamma(\rho_1+1)\cdot\Gamma(\rho_2+1)\right]^2}$$

となり、これによって4つの解の独立性が解る。

次にこの basis $X=[X_1, X_2, X_3, X_4]$ に関するモノドロミー群について考えよう。まず基本群の base point O を固定しておく。次に特異点の回りの simple loop を、λ_j に対応して μ_j とし、更に下図の様になっているものとする。



即ち、$\mu_j\cdot\mu_k$ を μ_k を先に回り次に μ_j を回るものとした時上の取り方は $\mu_1\cdot\mu_3\cdot\mu_4$ は無限遠点 ∞ を負の向きに一周す

るもの、とする。又、μ_j に対応する、basis X に関する行列を M_j と書くことにすると、Theorem 6 により

$$M_1 = I + \begin{bmatrix} e_1-1 & & & 0 \\ & e_2-1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & 1 & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \multicolumn{4}{c}{\boxed{\quad 0 \quad}} \end{bmatrix},$$

$$M_3 = I + (e_3-1) \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\boxed{\quad 0 \quad}} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \gamma_{34} \\ \multicolumn{4}{c}{0} \end{bmatrix}.$$

$$M_4 = I + (e_4-1) \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\boxed{\quad 0 \quad}} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

と表わされる事がわかる。従って、モノドロミー群を求めるには、上の γ_{ij} を求めればよい。今、

$$c_{jj} \equiv e_j - 1 \ , \quad c_{jk} \equiv (e_j-1)\gamma_{jk} \quad (j \neq k)$$

としよう。行列 L_1, L_2 を

$$L_1=\begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ 0 & c_{22} & & \text{\Large 0} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ & 0 & c_{23} & c_{24} \\ & \text{\Large 0} & 0 & c_{34} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

と定める。勿論，

$$L_1+L_2=(M_1-I)+(M_3-I)+(M_4-I).$$

この L_j を使うと，簡単な計算で

Prop. 7. $M_\infty \equiv M_1\cdot M_3\cdot M_4=(I-L_2)^{-1}(I+L_1)$.

又，(A-1) より $\det(M_\infty-fI)=(f_1-f)^2(f_2-f)^2$ かつ $\operatorname{rank}(M_\infty-f_jI)=2$ $(j=1,2)$ である。この事と，Prop. 7 より

Prop. 8. f_j は $\det[(L_1+fL_2)-(f-1)I]=0$ の重根であり，$\operatorname{rank}[(L_1+f_jL_2)-(f-1)I]=2$.

この Prop. 8 を用い，Prop. 4 に於ける計算と全く同じ計算をすることによって，

Theorem 9. 系 (#) のモノドロミー群は，次の 7 つの関係

式によって定まる。

$$\gamma_{13} = \frac{e_2(e_1-f_1)(e_1-f_2)}{(e_1-1)(e_1-e_2)f_1f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{41}} .$$

$$\gamma_{14} = \frac{(e_1-f_1)(e_1-f_2)(e_1e_3-f_1f_2)}{e_1e_3(e_1-1)(e_4-1)(e_2-e_1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{41}} .$$

$$\gamma_{23} = \frac{e_1(e_2-f_1)(e_2-f_2)}{(e_2-1)(e_2-e_1)f_1f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{42}} .$$

$$\gamma_{24} = \frac{(e_2-f_1)(e_2-f_2)(e_2e_3-f_1f_2)}{e_2e_3(e_2-1)(e_4-1)(e_1-e_2)} \cdot \frac{1}{\gamma_{42}} .$$

$$\gamma_{31} = \frac{e_2e_3-f_1f_2}{e_2(e_3-1)} \cdot \frac{\gamma_{41}}{\gamma_{43}} .$$

$$\gamma_{32} = \frac{e_1e_3-f_1f_2}{e_1(e_3-1)} \cdot \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{43}}$$

$$\gamma_{34} = \frac{(e_1e_3-f_1f_2)(f_1f_2-e_2e_3)}{e_1e_2e_3(e_3-1)(e_4-1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{43}} .$$

勿論、行列 A と同様、3つの non-zero constant は値を任意に指定できるので、それを、今の場合は γ_{41}、γ_{42}、γ_{43} に取ってある。

この定理より、次の定理も容易に証明される。

<u>Theorem 10.</u> 次の4つは同値である。

(a) 系(#)は irreducible.

(b) (#)のモノドロミー群は irreducible.

(c) M_j の non-trivial components $c_{jk} = (e_j - 1)\gamma_{jk}$ は全て0でない。

(d) $f_1 f_2 \neq e_1 e_3,\ e_2 e_3$、かつ $f_j \neq e_k$ $(j, k = 1, 2)$.

<u>注意.</u> 系(#)は Appell の超幾何函数 $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y)$ がみたす偏微分方程式系の、一次元の切り口に現われる。

Reference.

[1] K. Okubo, Connection problems for systems of linear differential equations; Japan-U.S. Seminar on Ordinary and Functional Differential Equations, pp. 238-248. Springer.