数理解析研究所講究録
第283巻 1976年 25-33

Schläfli 関数の反復積分表示

東大 教養学部　青本和彦

§1. S^n を n 次元の単位球 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$ とし, $S_1, S_2, \cdots, S_{n+1}$ を原点を通る一般の位置にある $(n+1)$ 個の超平面達とする; $f_j=0$ を S_j の方程式とし $f_1\geq 0, \cdots, f_{n+1}\geq 0$ によって定義される単体を Δ, $\langle ij\rangle$ を S_i と S_j との角とする時 Δ の体積 V は積分

$$\int_{\Delta} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} x_j \, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$$

によって与えられ これを $a_{ij}=-\cos\langle ij\rangle$ の関数と考える時 Schläfli 関数と云われる. $\Delta(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ 又は $V(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ $(1\leq p\leq n+1,\ \varepsilon_j=\pm 1)$ は S^n の中の不等式 $\varepsilon_1 f_{i_1}\geq 0, \cdots, \varepsilon_p f_{i_p}\geq 0$ によって定義される領域又はその体積を表わすとすれば次の Gauß-Bonnet 定理が成り立つ.

<u>Prop</u>. 1　n 奇数として

$$\frac{(n-1)}{2}|S^n| = \sum_{\nu=2}^{n-1} \sum_{i_1<\cdots<i_\nu} (-1)^\nu V(i_1, i_2, \cdots, i_\nu)$$

又 n 偶数として

$$\frac{(n-1)}{2}|S^n| = \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_\nu} (-1)^\nu V(i_1 i_2 \cdots i_\nu) -$$

$$-2\ V(1, 2, \cdots, n+1).$$

この Prop. によって $V(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ はすべて S^n の体積 $|S^n|$, $V(ij)$, $V(i_1 i_2 i_3 i_4)$, $\cdots$, $V(i_1 \cdots i_{2\nu})$　$\nu = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ の線型結合であることがわかる.

§2.　A は正値対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & 1 & \cdots & & a_{2\,n+1} \\ & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n\,n+1} \\ a_{n+1\,1} & \cdots & & a_{n+1\,n} & 1 \end{pmatrix}$$

を表わすとして　$D\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ j_1 \cdots j_p \end{pmatrix}$ は $i_1, \cdots, i_p$ 行 $j_1 \cdots j_p$ 列の小行列式,　$D(i_1 \cdots i_p)$ は $D\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ i_1 \cdots i_p \end{pmatrix}$,　$D(1\,2 \cdots n+1) = D$ とおく.

$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$ として $|I|=p$ とおく．
$\Delta^*(i_1\cdots i_p)$ を Δ に含まれる $S_{i_1\cdots i_p}$；
$f_{i_1}=0,\cdots,f_{i_p}=0$ によって定義される部分複体
とし $V^*(i_1\cdots i_p)$ は $\Delta^*(i_1\cdots i_p)$ の体積とする．この時 Schläfli の公式

$$dV=\sum_{i<j}V^*(i,j)\,d\langle i,j\rangle$$

が知られている．

今から n を奇数として $n=2\nu-1$ とおく．
T を3角行列

$$T=\begin{pmatrix}1 & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n+1\,1} & t_{n+1\,2} & & t_{n+1\,n+1}\end{pmatrix}$$

$t_{22}>0,\cdots,t_{n+1\,n+1}>0$ で $T\,{}^tT=A$ によって定義される一意のものとする．すると

$$\langle 1,2\rangle=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{21}+i\,t_{22}}{-t_{21}-i\,t_{22}}\right)$$

Schläfliの公式をV*(I)に適用して

$$dV^*(I)=\sum_{\substack{j_1<j_2\\ I\cap(j_1j_2)=\phi}} V^*(I,(j_1j_2))\,d\left\langle {I \atop j_1j_2}\right\rangle$$

ここに $\left\langle {I \atop j_1j_2}\right\rangle$ は $\Delta^*(I)$ によって見込まれる

S_{j_1} と S_{j_2} との面角とする．すると

$$\left\langle {1\,2 \atop 3\,4}\right\rangle=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{43}+i\,t_{44}}{-t_{43}-i\,t_{44}}\right)$$

$$\left\langle {1\,2\cdots 2\mu-3\;\,2\mu-2 \atop 2\mu-1,\,2\mu}\right\rangle=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{2\mu,2\mu-1}+it_{2\mu,2\mu}}{-t_{2\mu,2\mu-1}-it_{2\mu,2\mu}}\right)$$

$(0\leqq\mu\leqq\nu-1)$． これらは A の小行列式達を用いて表示され V は反復積分表示となる．

［記号］ I と J を添字集合 $I=(i_1,\cdots,i_p)$ $J=(i_1\cdots i_p\,i_{p+1}\,i_{p+2})$ として 1次型式

$$\frac{1}{2i}\,d\log\left(\frac{-D\begin{pmatrix}i_1\cdots i_p & i_{p+1}\\ i_1\cdots i_p & i_{p+2}\end{pmatrix}+i\sqrt{D(I)D(J)}}{-D\begin{pmatrix}i_1\cdots i_p & i_{p+1}\\ i_1\cdots i_p & i_{p+2}\end{pmatrix}-i\sqrt{D(I)D(J)}}\right)$$

を $\omega\left({I \atop J}\right)$ とおく．

(定義) $\mathfrak{X}$ を A を変数とする複素アフィン空間とし $\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_p}$ を $D(i_1 i_2\cdots i_p)=0$ によって定義される因子とする. $\hat{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{X}_{i_1 i_2\cdots i_{2\mu}}$ $(1\leq\mu\leq\nu)$ で分岐する $\sqrt{D(i_1 i_2\cdots i_{2\mu})}$ を一意化する $2^{(2^n-1)}$ 次の $\mathfrak{X}$ 上の被覆空間とする. π を $\hat{\mathfrak{X}}$ から $\mathfrak{X}$ への全射とする. すると $\omega\left(\frac{I}{J}\right)$ $(|I|=\text{even})$ は $\hat{\mathfrak{X}}$ の log poles の 1-形式で 極は ∞ 及び $\pi^{-1}(\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_{2\mu-1}})$. $M=\hat{\mathfrak{X}}-\bigcup_{\substack{i_1<\cdots<i_{2\mu-1}\\ 1\leq\mu\leq\nu}}\pi^{-1}(\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_{2\mu-1}})\cup\pi^{-1}(\infty)$ とおき $\Omega(M;p,q)$ は p を始点, q を終点とする連続曲線の空間(道空間)とする. このとき $\omega_1,\cdots,\omega_m$ を任意のそれぞれ l_1 次, $\cdots$, l_m 次 M 上の微分型式として m 次反復積分

$$\int \omega_1\,\omega_2\cdots\omega_m$$

は $\Omega(M;p,q)$ 上の $l_1+\cdots+l_m-m$ 次微分型式として定義される(Chen).

この状況のもとに

[定理]

$$V = \sum_{(I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_\nu)} \sum_{\sigma=0}^{\nu} \int_E^A \omega\binom{I_0}{I_1}\omega\binom{I_1}{I_2}\cdots\omega\binom{I_{\sigma-1}}{I_\sigma} \cdot \frac{|S^{n-2\sigma}|}{2^{n+1-2\sigma}}$$

, ここで $|S^{-1}|=1$, $I_0, I_1, \cdots, I_\nu$ は i) $|I_0|=0$, $|I_1|=2, \cdots, |I_\nu|=2\nu$ ii) $I_0=\phi \subset I_1 \subset \cdots \subset I_\nu$ をみたす添字集合全体にわたる. V は $\Omega(M; E, *)$ 上の関数だが実は その homotopy 類にしかよらない. この事は等式 ($|I|+4=|J|$, $I \subset J$ に対して)

$$\sum_{\substack{|K|=|I|+2 \\ I \subset K \subset J}} \omega\binom{I}{K} \wedge \omega\binom{K}{J} = 0$$

からもわかる.

Poincaré, Lappo-Danilevski にならって これらの関数を "超 log" と呼ぶ. V は ν 次の超 log である.

§3. V のベキ級数展開

V は 又

$$V=(n+1)\int_{\substack{f_1\geqq 0,\cdots,f_{n+1}\geqq 0\\ 1\geqq x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2}} dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$$

と書ける. B を $K^{-1}A^{-1}K^{-1}$ によって定義される行列とする. ここで K は対角行列でその (i,i) 成分は $\sqrt{\dfrac{D(1\cdots i-1\ i+1\cdots n+1)}{D(1\ 2\cdots i\cdots n+1)}}$.

この時

[定理]

$$\frac{2^{n+1}D}{n+1}V=\sum_{\sigma_{ij}\geqq 0}\frac{\prod(-2b_{ij})^{\sigma_{ij}}}{\prod_{i<j}\sigma_{ij}!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(\dfrac{\sigma_{1k}+\cdots+\sigma_{k-1\,k}+\sigma_{k\,k+1}+\cdots+\sigma_{k\,n+1}}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}+1\right)}$$

が成立し 右辺は収束する. これは一般化された超幾何関数で Mellin-Sato 型と呼んでおくことにする.

最後に 素朴な 質問を掲げておくことにする.
log は $n=1$ の V の体積 を 表示するに 用いられ
その逆 は exp であった. それは又 加法公式 によって
特徴づけられるものでもある. $n>1$ の場合
対応する 加法公式 とは 何か? 又 その逆とは
どんな意味合いのものであろうか?

$$\log \xleftrightarrow{\text{逆}} \exp$$

$$\text{hyper log} \xleftrightarrow{\text{逆}} \text{hyper exp} \ ?$$

$$\text{Abel integral} \xleftrightarrow{\text{逆}} \vartheta\text{-funct.}$$

....

[文献]

◎ K.T. Chen, Iterated integrals of differential forms and loop space homology, Ann. of Math. 97(1973), 217–246

◎ ——, Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 206(1975), 83–98

◎ H.S.M. Coxeter, The functions of

Schläfli and Lobatschefsky, Quart. J. Math. 6 (1935), 13–29

◎ S. Iitaka Logarithmic forms of algebraic varietiés, to appear

◎ H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie, Comptes rendus T. 140 (1905), 113–117

◎ M. Sato, Singular orbits in prehomogeneous vector spaces, Lec. Notes at Univ. of Tokyo, 1972.

◎ L. Schläfli, On the multiple integral $\int\int\cdots\int dx\,dy\cdots dz$ whose limits are $p_1 = ax + by + \cdots + hz > 0$, $p_2 > 0, \cdots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$, Quart. J. of Math. 3 (1860), 54–68, 97–108.