数理解析研究所講究録
第 283 巻 1976 年 36-42

代数函数と bifucation diagram

東大 教養 斎藤恭司

$\mathbb{C}^n$内の複素超曲Hを調べるのに、Zariski や Lefschetz 等、Hを$\mathbb{C}^{n-1}$に射影して$\mathbb{C}^{n-1}$の有限被覆として実現し、その分岐点の集合D(ramification discriminant)$\subset \mathbb{C}^{n-1}$にそって Hがどう変化するか(equi-singularity, vanishing cycles)調べるのが普通であるが、ここでは新たに、bifucation diagram E なる概念を導入してみる。

§0.

$h(x_1,\cdots,x_n)$ を$\mathbb{C}^n$の原点の近傍で定義された正則函数で、

$h(x_1,\cdots,x_n) = x_n^d + a_1(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{d-1} + \cdots \quad + a_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$

$a_i(0,\cdots,0)=0$, $\deg a_i \geq i$ なる Weierstraß 標準型としよう。この時 $H=\{(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{C}^n \mid h(x_1,\cdots,x_n)=0\}$ は$\mathbb{C}^n$の原点近くの hypersurface を定める。1方、与えられた$(x_1,\cdots,x_{n-1})$に対し、$h(x_1,\cdots,x_n)=0$ は x_nについてd次方程式だから、d個の根、$\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})$, $\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})$, $\cdots$, $\varphi_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$ を持つ。

x_nの多項式として、hと$\frac{\partial h}{\partial x_n}$の終結式を$\omega(x_1,\dots,x_{n-1})$とおけば、

$$\omega(x_1,\dots,x_{d-1}) = \text{const}\prod_{i\neq j}\left(\varphi_i(x_1,\dots,x_{n-1})-\varphi_j(x_1,\dots,x_{n-1})\right)$$

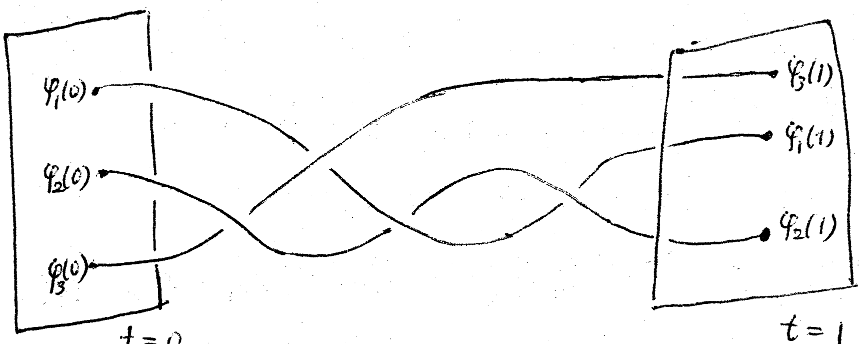
だから

$$D=\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1} : \omega(x_1,\dots,x_{n-1})=0\}$$

を*discriminant*と呼ぶ事にすると、$\varphi_1,\dots,\varphi_d$は$(\mathbb{C}^{n-1}-D,0)$で正則多価函数とする事ができ、これ等が、$h$の定める代数函数である。

さて、この代数函数$\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1}),\dots,\varphi_d(x_1,\dots,x_{n-1})$の"多価性"を立ち入って調べると次の組み紐の概念が出てくる。

複素平面にd個の相異る点$\varphi_1,\dots,\varphi_d$があるとし、それが一定の時間平面内を互いに[redacted]ぶつからぬ様に動きまわり、($\varphi_1(t),\dots,\varphi_d(t)$, $0\le t\le 1$, $\varphi_i(t)\neq\varphi_j(t)$ for $i\neq j$) 最後にもとの点集合にもどる(i.e. $\{\varphi_1(0),\dots,\varphi_d(0)\}=\{\varphi_1(1),\dots,\varphi_d(1)\}$)とする。



組み紐の例

この様なものは、組みひもと呼ばれている。二つの組みひもが与えられた時、両者を自然に[redacted]接続した組みひもを積とする事により、組みひも全体(のホモトピー類)に群構造が入り、それをB_dと書く。

又、与えられた組みひもに対し、その始点と終点[redacted]の対応を考える事により点集合$\{\varphi_1,\dots,\varphi_d\}$の置換が定まる。この対応

は B_d から対称群 S_d の上への準同型をひきおこす。

さて、代数函数 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}),\cdots,\varphi_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$ にもどろう。$x_1,\cdots,x_{n-1}$ が、$\mathbb{C}^{n-1}-D$ の閉じた道にそって動くと、対応して $\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}),\cdots,\varphi_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$ は $\mathbb{C}$ 内を互にぶつからぬ様に動くのだから或る組みひもが定まる。この対応は更に、原点の近くでの局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0$ から組みひも群 B_d への表現をひき起す。表現の合成 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0\to B_d\to S_d$ が、いわゆる代数函数のモノドロミー表現である。

この"組みひも表現" $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0\to B_d$ とモノドロミー表現の持つ情報の質の違いは、標語的に言って *homotopical* な情報と *homological* な情報の違いともいえる。例へば $\mathbb{C}^n$ の原点の小近傍から超曲面 H をぬいた残りの、局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^n-H)_0$ の生成系の基本関係式を組みひも表現 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0\to B_d$ から、完全に代数的に決める事ができる。(Zariski, Van-Kampen)

次に組みひも表現をどの様に求めるか考えてみよう。まず discriminant D の原点における重複度(=Dの定義式のTaylor展開最少次数)が m なら、$\mathbb{C}^{n-1}$ の原点の近くを通る適当な複素直線を L とすると、L と D は丁度 m ケ所で transversal に交る。そこで $y_1,\cdots,y_m$ をその交点とし、L 内に $y_i\ (i\geq 1)$ のいずれとも異る点 y_0 を基点と選び、y_0 を発し、y_i を時計方向に1周し、y_0 にもどる道を f_i とする。更に各 f_i が y_0 以外で交点を持たないとする

と、$f_1,\cdots,f_m$ を $\mathbb{C}^{n-1}-D$ 内の道とみなせば、それ等は局所基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^{n-1}-D)_0$ の生成系になっている事が分るので（Lefschetz）各 f_i に対し、対応する組ひもをもとめればよい事となる。

ところが筆者の知る限り、この組ひもの求め方は、実際に $(x_1,\cdots,x_{n-1})$ のパラメーター値に対して代数方程式を解いて解の動きを追跡するという超越的（transcendental）な過程で、$\pi_1(\mathbb{C}^n-H)_0$ の計算の他の部分（例へば、discriminant の計算）が"代数化"されている事実と著しい対称をなしている。例へば、コンピューターによって、与えられた代数函数の組ひもを計算するプログラムをつくる事が原理的に可能であろうか。かつて Mumford も似た問を提出していたが、筆者には不明である。

そこで、以下の節に bifucation diagram なる概念を導入しようと思う。それが、braid の計算の代数化の方向に向うかに役立たないかと期待するが、未だ決定的な結果が得られているわけではない。

§1.

記号（$h(x_1,\cdots,x_n)$，代数函数 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}),\cdots,\varphi_d(x_1,\cdots,x_{n-1})$，discriminant D 等々）を§0と同じとする。

<u>定義</u>

$$E:=\left\{(x_1,\cdots x_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}\ \middle|\ \begin{array}{l}{}^{\exists}i,{}^{\exists}j,{}^{\exists}k,\ 1\leq i,j,k\leq d \ \text{s.t.}\ i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i.\\ \varphi_i(x_1,\cdots,x_{n-1}),\ \varphi_j(x_1,\cdots,x_{n-1}),\ \varphi_k(x_1,\cdots,x_{n-1})\\ \text{は複素平面内のある実直線上に並ぶ (colinear)}\end{array}\right\}$$

$$F := \left\{ (x_1,\cdots,x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le {}^{\exists}i, {}^{\exists}j, {}^{\exists}k, {}^{\exists}l \le d \quad \text{s.t. i) } i,j,k,l \text{ は互に相異る.} \\ \text{ii) } \varphi_i(x_1,\cdots,x_{n-1}), \varphi_j(x_1,\cdots,x_{n-1}), \varphi_k(x_1,\cdots,x_{n-1}), \varphi_l(x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ \text{は複素平面内の或る円周上に並ぶ} \end{array} \right\}$$

とおき、Eを代数函数φの<u>bifucation diagram</u>と呼ぶ事にしよう。

簡単な事実として、E及びFは、$\mathbb{C}^{n-1}$の(原点の近傍の)部分集合として、$\mathbb{C}^{n-1}$全体に一致しないならば(genericなφに対してはそうなるが)$\mathbb{C}^{n-1}$の中のreal codimension 1のsubvarietyである。従ってEは$\mathbb{C}^{n-1}$をいくつかの成分に分割し、Fはその分割にある"構造"を与えていると考えられるのであるが、本稿では当面Eに限って、もう少し調べてみる。

<u>命題</u> i) Eは($\mathbb{C}^{n-1}$と一致しない限り)$\mathbb{C}^{n-1}-D$内のnon-compact real hypersurfaces E_μの合併$E=\cup E_\mu$となり、$\partial E_\mu \subset D$.

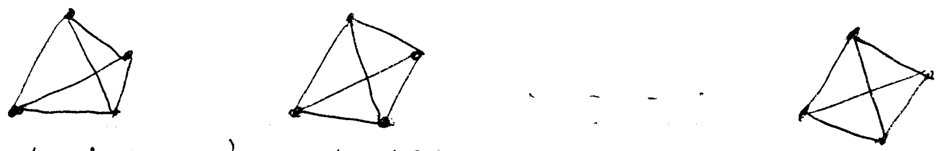
ii) discriminant D上の1点$x'=(x_1',\cdots,x_{n-1}')$をとってくる。この点で$x_n$の多項式hが$\prod_{i=1}^{l}(x_n-a_i)^{d_i}$ $(a_i \neq a_j \text{ for } i \neq j)$と分解し対応して、$x'$の近傍で$h(x_1\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{l} h_i(x_1,\cdots,x_n)$ (ここでh_iはx_nについてd_i次多項式で$h_i(x',x_n)=(x_n-a_i)^{d_i}$)と分解しているとする。更に$h_i$のdiscriminantの点$x'$におけるmultiplicityを$m_i$とする。(勿論この時discriminant Dの点x'における重複度$=\sum_{i=1}^{l} m_i$となる。)

この時$\partial E_\mu \ni x'$(つまりx'を境界点に持つ)となるE_μの個数は$\sum_{i=1}^{l} m_i(d-d_i)$より大きく$(d-2)\times$点$x'$におけるDのmultiplicity

を越えない。

iii) hが特に、$x_1,\cdots,x_n$についてd次homogeneous多項式ならば bifucation diagram Eの成分の個数は $\dfrac{d(d-1)(d-2)}{2}$ 個を越えない。

iv) §0と同様 Lを$\mathbb{C}^{n-1}$内原点近くを通る複素直線とする $\{y_1,\cdots,y_m\}=L\cap D$, $E'=L\cap E$ とおくと、E'はdiscriminantの点y_i間を結ぶpathの集合である。ii)で述べた様に例へばy_iのmultiplicityが1ならばy_iを発するpathは$(d-2)$-本である。特にhがd次homogenous多項式でもっとも"generic"なものとすると$m=d(d-1)$であるがbifucation diagram E'はsymbolicalに次の様になる。



$d-1$ケの点, $d-1$ケの点, $d-1$ケの点

と夫々を互に結ぶpaths

d組の成分

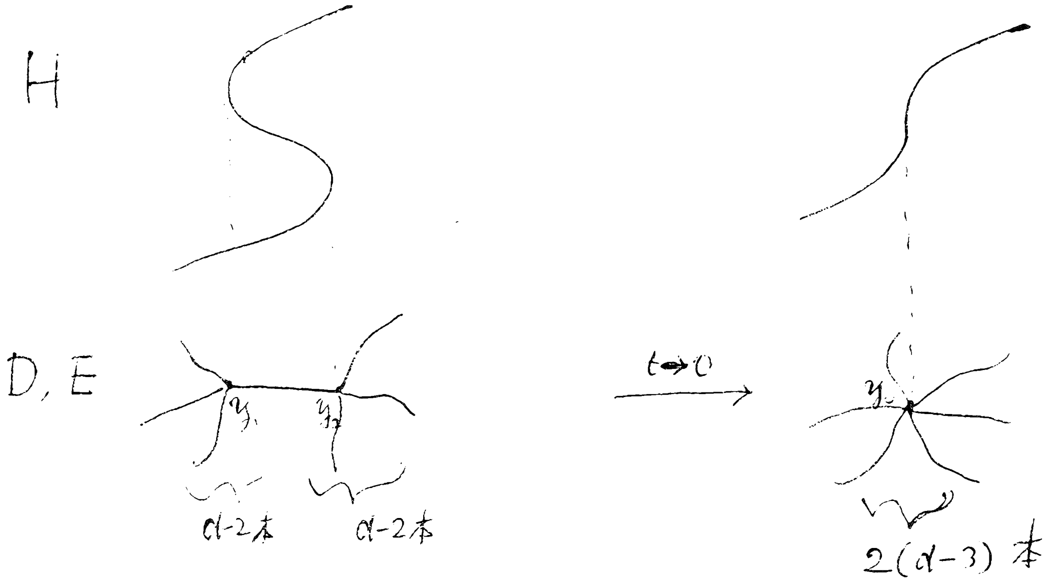
v)

又、ii)で述べた事実の"解釈"は次の様になる。

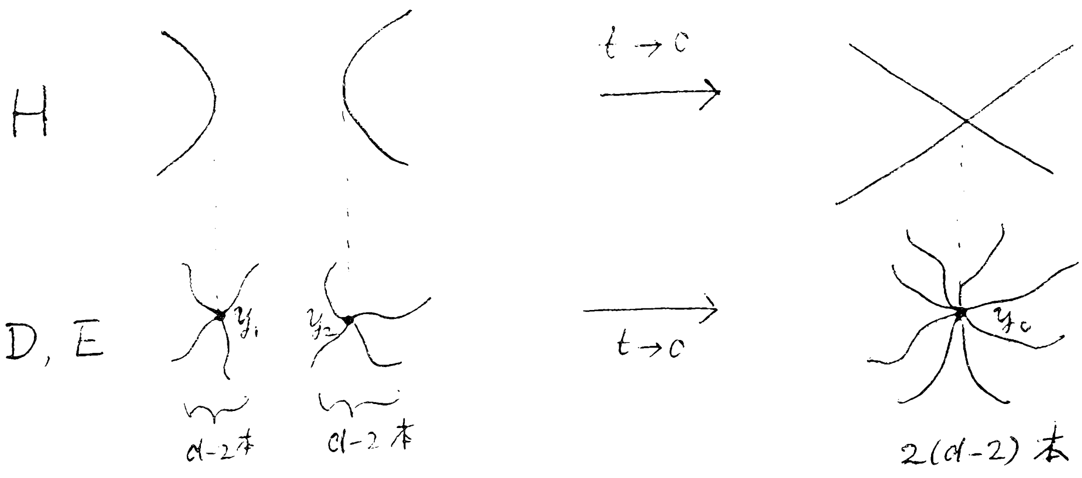
例へば、y_1, y_2がmultiplicity 1の点とすればそれぞれから $d-2$-本のpathが出ている。今hをdeformとてy_1とy_2を1点y_0に付け重ねるとその点y_0の重複度は2となる。しかし実際には2つの場合が考えられる。イ) y_1, y_2が両者を結ぶ或るE'のpathにそって近ずいた場合、ロ) y_1, y_2が両者を結ぶE'のpath(もし

それがあるとしても）にそわずに、近付く場合

イ) $h_1 = x^3 - xt - y \xrightarrow{t \to 0} h_1 = x^3 - y$



ロ) $h_1 = x^2 - y^2 + t$ $\qquad$ $h_1 = x^2 - y^2$



<u>証明</u>　以上の事実を示すのに、curveを用いて、localに示す方法と、Weyl群を用いて、discriminant E及び bifucation diagram Eの universal objectを構成する方法の2通り考えられる。