数理解析研究所講究録
第 283 巻 1976 年 63-67

特異点を持つ超曲面に関する Toeplitz 作用素のなす C^*-代数

東北大 理　佐藤肇

今，Mを簡単の為にStein多様体，Ωをその強擬凸領域とする。Mにはエルミート計量が入っており，従ってその体積形式も与えられているとしよう。$L^2(\Omega)$で，Ω上の二乗可積分な関数全体，$H^2(\Omega)$で$L^2(\Omega)$の元で正則な関数全体のなす閉部分空間を表わす。又，$\Pi : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega)$を直交射影とする。具体的には，$\Pi$はBergmann核による積分で表わされる。

任意の函数 $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ に対して Toeplitz 作用素（あるいは Wiener-Hopf 作用素） $T_\varphi \in \mathcal{L}(H^2(\Omega))$ （$H^2(\Omega)$の有界線型作用素）を

$$T_\varphi f = \Pi \varphi f \qquad f \in H^2(\Omega)$$

で定義する。

今，$\mathcal{T}$でT_φ $(\varphi \in C(\bar{\Omega}))$によって生成される$C^*$-代数，$\mathcal{K}(H^2(\Omega))$で$H^2(\Omega)$のコンパクト作用素全体を表わす。

定理　次の列は完全である,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow C(\partial\Omega) \to 0 .$$

証明は Janas (Studia Math. 54, 1975) が $\mathbb{C}^n$ の部分空間に対して行ったのと同様に, Kohn の強擬凸多様体に対する $\bar{\partial}$ 作用素の解を用いて, 薮田の注意を適用すればよい。

上の定理は, $H^2(\Omega)$ の代わりに, $H^2(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ を用いても, 全く同様に成立する。但し $H^2(\partial\Omega)$ は $\bar{\partial}_b$ で零に移される元全体と定義する。この場合には直交射影 $\pi : L^2(\partial\Omega) \to H^2(\partial\Omega)$ は Cauchy-Szegö 核による積分で表わされ, H を高次の Hilbert 変換とすれば 1次元の場合と同様に

$$\pi = \frac{1}{2}(H + I)$$

となる。但し 1次元の場合, π, H は擬微分作用素 PDO であるのに対し, 高次元では, 特異積分作用素ではあるが (Folland-Stein 参照), PDO ではない。

問題　高次の Hilbert 変換の "Symbol" とは何か?

即ち, 1次元の場合には Atiyah-Singer の定理によって

Toeplitz 作用素の Fredholm 指数か計算されるか（実際に1次元 $\partial\Omega = S^1$ の場合には，この Toeplitz 作用素の指数を実際に計算して，位相的指数と解析的指数が等しいことを示すのか Atiyah-Singer の証明には必須の Step である）高次元の場合に，位相的指数が如何に定義されるかというのが，非常に興味ある問題と思われる。

今，X で compact な $\mathbb{C}^N$（N：大）の部分空間をあらわし，$\mathcal{C}$ で，ある Hilbert 空間の有界作用素全体をコンパクト作用素のイデアルで割ったもの全体という Calkin 代数を表わす。Ext(X) で C(X) から $\mathcal{C}$ への ＊－埋め込みの同型類全体とする。Ext(X) は定理のような，C(X) の，コンパクト作用素による Extension 全体と同型になる。Brown-Douglas-Fillmore-Atiyah 等による美しい結果（BAMS, 79, 1973）

$$\mathrm{Ext}(X) \cong K_1(X),$$

但し，右辺は X の1次元ホモロジーK-理論，を用いると

系　　$\mathcal{T} \in K_1(\partial\Omega)$

を得る。

さて，f を原点で孤立特異点を持つ解析函数；M_f で $f = \varepsilon$（ε：小）と原点を中心とする開球面との共通部分と

する。M_f は $f=\varepsilon$ という超曲面の中での強擬凸領域となり（田中，京大講義録），定理が適用できる。M_f には $\mathbb{C}^n$ より導かれた計量を入れる。従って M_f の境界 ∂M_f （Brieskorn 型の多様体）に対して，自然に $\mathcal{J}\in K_1(\partial M_f)$ の元が定まる。これは M_f のホモロジー K 理論的特性類とみることが出来る。

<u>問題</u>　$\mathcal{J}\in K_1(\partial M_f)$ は位相的不変量か？ あるいは強擬凸構造によるか？

さて，$\varphi\in C(\partial\Omega)$ を固定し，T_φ を $L^2(\partial\Omega)$ から $L^2(\partial\Omega)$ への作用素として，$H^2(\partial\Omega)$ の直交補空間で恒等写像，即ち

$$T_\varphi = \Pi\varphi\Pi + (1-\Pi)$$

と自然に拡張する。T_φ は Atiyah（函数解析国際会議，東京，1969）の言う $\mathcal{E}ll(\partial\Omega)$ の元を定める。$\mathcal{E}ll(\partial\Omega)$ の元は自然に，ホモロジー K 理論指数 $\in K_0(\partial\Omega)$ を定めるから，

$$\{T_\varphi\}\in K_0(\partial\Omega)$$

とみなすことが出来る。同様に $\varphi\in C(\partial\Omega)\otimes M(k)$ 但し，$M(k)$ は $(k\times k)$－複素行列全体とする時，$\{T_\varphi\}\in K_0(\partial\Omega)$ となる。

$\varphi \in C(\partial\Omega) \otimes M(k)$ かつ $C(\partial\Omega) \otimes GL(k:\mathbb{C})$ に含まれると仮定すると $\{\varphi\} \in K^1(\partial\Omega)$ とみなすことが出来る（有限次元）。

自然に Pairing

$$\cap : K^1(\partial\Omega) \otimes K_1(\partial\Omega) \longrightarrow K_0(\partial\Omega)$$

が定義されるが,

$$\{\varphi\} \cap \mathcal{T} = \{T_\varphi\}$$

が成立する。