数理解析研究所講究録
第 283 巻 1976 年 68-83

単純な偶数次元 Fibered knot の分類

東大 理　小島定吉

§1 序

(5) に於ける Levine の分類定理は，"simple" と云う強い仮定にもかかわらず，Seifert matrix が，奇数次元 knot の isotopy type の complete invariant であることを示している点で注目すべき結果である。実際 Milnor fibration 等を見る時，Seifert matrix の持つ意味は深い。ここでは，偶数次元の特に Fibered knot の場合に，このような complete invariant を与えると云う問題を考える。

§2 定義及び結果

Fibered knot とは，$f: S^{2n} \longrightarrow S^{2n+2}$ smooth embedding と，$\phi: S^{2n+2} - f(S^{2n}) \longrightarrow S^1$ smooth fibration の pair (f, ϕ) で，$f(S^{2n})$ の trivial tubular neighborhood $f(S^{2n}) \times D^2$ と，明らかな projection p に対して，

$$\begin{tikzcd} f(S^{2m})\times(D^2-0) \arrow[rr, "\text{inclusion}"] \arrow[dr, "p"'] & & S^{2m+2}-f(S^{2m}) \arrow[dl, "\phi"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

が可換であるものとする。これは S^{2m+2} 上，$f(S^{2m})$ を axis とする spinnable structure と考えてよい。（定義については (4) を参照）。したがって，$\theta\in S^1$ に対し $F_\theta=\phi^{-1}(\theta)\cap(S^{2m+2}-f(S^{2m})\times \mathrm{Int}\,D^2)$ とすれば，covering homotopy によって $h: F_0\longrightarrow F_{2\pi}$ diffeomorphism と $g: F_0\times[0,2\pi]\longrightarrow S^{2m+2}-f(S^{2m})$ なる map が得られ，これらを用いて S^{2m+2} 上 ϕ のつくる spinnable structure を $k=\{F_0, h, g\}$ と書くことが出来る。（h, g が (4) に於ける定義に全く一致している訳ではないが，このように考えても差し支えない）。したがって，我々は k を，前と混同させて Fibered knot と呼ぶことにする。

さて，二つの Fibered knot $(f_1,\phi_1)=k_1$，$(f_2,\phi_2)=k_2$ に対し，isotopy $H_t: S^{2m+2}\longrightarrow S^{2m+2}$ として，$H_0=id$，$\phi_1\circ H_1=\phi_2$，を満たすものが存在する時，isomorphic と呼び $k_1\cong k_2$ と書く。

≪注意≫ isomorphic な二つの knot は，knot として isotopic である。ところが，Browder の結果（本質的には h-cobordism 定理）によって，$m\geqq 2$ の時は逆も成り立つ。

<u>Def 1.</u> $k=\{F_0, h, g\}$ が simple とは，compact $(2m+1)$ dim

manifold F_0 が，oriented，$(n-1)$ connected で，n 次元のホモロジーの torsion が消えている時。

さて，$g_t: F_0 \longrightarrow S^{2n+2}$ を $g_t(x) = g(x,t)$ によって定め，covering homotopy によって，t の domain $[0, 2\pi]$ を $\mathbb{R}$ に拡張しておく。更に一般的な記号として，space 間の写像 f によって induce される homology 群の準同型を f_*，homotopy 群の準同型を $f_\#$ と書く。

$\alpha \in H_n(F_0)$, $\beta \in H_{n+1}(F_0)$ に対し，Seifert form $l: H_n(F_0) \otimes H_{n+1}(F_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $l(\alpha \otimes \beta) = L((g_0)_*(\alpha), (g_{-\pi})_*(\beta))$ によって定める。ここで $L(\ ,\ )$ は S^{2n+2} における linking number である。更に $\{\alpha_i\}\{\beta_i\}$ を $\langle \alpha_i \cdot \beta_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たす $H_n(F_0)$ $H_{n+1}(F_0)$ の basis とする時，$L(k) = (l(\alpha_i \otimes \beta_j))$ を Seifert matrix と呼ぶ。

ここで linking number の拡張概念として Haefliger の意味での link を考える (3)。すなわち $f_1, f_2 : S^{n+1} \longrightarrow S^{2n+2}$ を $f_1(S^{n+1}) \cap f_2(S^{n+1}) = \phi$ を満たす smooth embedding とする。$n \geqq 2$ の時，$S^{2n+2} - f_1(S^{n+1})$ は S^n に homotopy 同値。したがって f_2 は $\pi_{n+1}(S^n)$ の元を一つ定める。この元を $L'(f_1(S^{n+1}), f_2(S^{n+1}))$ と書くことにすると，$n \geqq 3$ の時，$\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2$ で，$L'(f_1(S^{n+1}), f_2(S^{n+1})) = L'(f_2(S^{n+1}), f_1(S^{n+1}))$ であることが知られている。

$n \geqq 4$ の時，任意の $\pi_{n+1}(F_0)$ の元は S^{n+1} の embedding で実現できる。この事実を用い，今 E_i を S_i^{n+1} 上の D^n-bundle，$\widetilde{E}_i$ を S_i^n 上の D^{n+1}-bundle とし，E_i と $\widetilde{E}_i$ を plumbing した manifold を W_i とすると，F_0 は $\natural_{i=1}^{r} W_i$ (boundary connected sum) に diffeo である事が示される(7)。ここで r は $H_n(F_0)$ のランク。更に此の handle 分解は，$H_n(F_0)$.$H_{n+1}(F_0)$ の basis $\{\alpha_i\}\{\beta_i\}$ に忠実であるとしてよい。$\pi_{n+1}(F_0) \cong H_{n+1}(F_0) \oplus (H_n(F_0) \otimes \mathbb{Z}_2) = \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r} \oplus \overbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}^{r}$ なる同型対応が有り，E_i の中心線である S_i^{n+1} は $\pi_{n+1}(F_0)$ の free part の生成元を represent している。その Hurewicz 準同型による $H_{n+1}(F_0)$ への image は β_i である。ここで S_i^{n+1} が represent する $\pi_{n+1}(F_0)$ の元を $\beta_{i\#}$ とし，同様に S_i^n が represent する $\pi_n(F_0) \cong H_n(F_0)$ の元を $\alpha_{i\#}$ とする時，F_0 は $\{\alpha_{i\#}\}\{\beta_{i\#}\}$ に忠実な handle 分解を持つ。このような basis $\{\alpha_{i\#}\}\{\beta_{i\#}\}$ を nice basis と呼ぶ。

さて，$u, v \in \pi_{n+1}(F_0)$ に対して $l' : \pi_{n+1}(F_0) \times \pi_{n+1}(F_0) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ を $l'(u,v) = L'((g_0)_\#(u), (g_{-\pi})_\#(v))$ によって定める事を考えよう。ただし右辺の homotopy 群の元は，すべて sphere の embedding で実現されたものとして考える。此の時，L' の可換性から，この写像が well define で，更に u, v が infinite order の時には l' が bilinear form であることが分かる。そこで $\{\beta_{i\#}\}$ を $\pi_{n+1}(F_0)$ の nice basis とする時，$V(k) =$

$\ell'(\beta_{i\#}, \beta_{j\#})$ と定める。

<u>Def 2.</u> 行列対 $(L(k), V(k))$ を k の l.p. 行列と呼ぶ。

<u>Def 3.</u> $(L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k')) \Longleftrightarrow$ 適当な unimodular 行列 X と，$Y \cdot {}^tX$ が mod 2 で対称となるような $\mathbb{Z}_2$-行列 Y が存在して，$V(k') \equiv X \cdot V(k) \cdot {}^tX + X \cdot (E - {}^tL(k)) \cdot {}^tY + Y \cdot L(k) \cdot {}^tX \pmod 2$, ${}^tX^{-1} \cdot L(k) \cdot {}^tX = L(k')$ が成り立つ。

<u>Def 4.</u> $\mathbb{Z}$-unimodular 行列 A が s-unimodular であるとは，$A - E$ が unimodular である時。ここで E は単位行列。

以上の定義により，我々の目標は次のように定式化される。

<u>定理 1.</u> 任意の $\mathbb{Z}$-s-unimodular 行列 A，$\mathbb{Z}_2$-対称行列 B に対し，$(L(k), V(k)) = (A, B)$ を満たす simple fibered knot k が存在する。ただし $n \geqq 4$。

<u>定理 2.</u> k, k' を simple fibered knot とする。$n \geqq 4$ の時

$$(L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k')) \Longleftrightarrow k \cong k'$$

§3　F_0 の handle 分解

この節では $n \geqq 4$ の時次の補題を証明するのが目的である。

<u>補題 1.</u> $k \cong k' \Longrightarrow (L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k'))$

$n \geqq 4$ の時，$\lambda : \pi_{n+1}(F_0) \times \pi_{n+1}(F_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ を次のように定める。すなわち，$x, y \in \pi_{n+1}(F_0)$ を transversal に交わるような sphere の embedding で実現し，$x \cap y$ を含む x の disc $D_x^{n+1} \subset S_x^{n+1} = x$ を考える。x の F_0 における normal bundle を D_x^{n+1} に制限したものは trivial。これに対し Pontrijagin Thom-構成を行ない，$f : F_0 \longrightarrow S^n$ を得る。f によって induce される $f_\# : \pi_{n+1}(F_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ によって $\lambda(x.y) = f_\#(y)$ と定める。

<u>補助定理</u>（C.T.C. Wall (8)） $n \geqq 4$ で F_0 が 3-connected の時，λ は well define で symmetric bilinear form である。

<u>補題 2.</u> S_1^{n+1}, S_2^{n+1} を F_0 の中に transversal に交わる様に埋め込まれた sphere とする。$S_1^{n+1} \cap S_2^{n+1} = V^1$ に対し，F_0 の中の disc D^{2n+1} で $D^{2n+1} \cap S_i^{n+1} = D_i^{n+1}$ $(i=1,2)$ かつ $D^{2n+1} \supset V^1$ を満たすものが存在する。

証明は，F_0 の連結性と，general position によって与えられる。詳細は (8) を参照。

さて，$\partial(D^{2n+1}, D_1^{n+1}, D_2^{n+1}) = (S^{2n}, S_1^n, S_2^n)$ によって D^{2n+1} の表面に link が出来る。此れの link 不変量を $L'(S_1^n, S_2^n)$ とする時，$\lambda(x.y) = S\,L'(S_1^n, S_2^n)$ であることが容易に示される。ただし S は $\pi_n(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ suspension homo である。

<u>補題 3.</u> $\lambda(x.y) = 0 \iff x, y$ を disjoint な sphere の embedding で実現できる。

証明） $n \geqq 4$ であるから suspension は同型。したがって $\lambda(x, y)=0 \iff L'(S_1^n, S_2^n)=0$。Haefliger の定理を用いれば，$\partial D^{2n+1}$ 上に S_1^n によって bound される disc D^{n+1} を，S_2^n と共通部分を持たない様に取る事が出来る。$(S_1^{n+1}-D_1^{n+1}) \cup D^{n+1}$ と S_1^{n+1} は F_0 の中で homotopic であるから，$(S_1^{n+1}-D_1^{n+1}) \cup D^{n+1}$ は，x を represent していて S_2^{n+1} と共通部分がない。後は，再び Haefliger の定理によって $(S_1^{n+1}-D_1^{n+1}) \cup D^{n+1}$ を smooth 近似しておけばよい。　　　　　　　　　＜終＞

今 $\{\alpha_{i\#}\}, \{\beta_{i\#}\}$ を F_0 の nice basis とし，$\xi_{i\#}$ を $\alpha_{i\#} \in \pi_n(F_0)$ に $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2$ の生成元を compose して得られる $\pi_{n+1}(F_0)$ の $\mathbb{Z}_2$ part の生成元とする。この時 $\pi_{n+1}(F_0)$ の自己同型は，

$$\psi(\beta_{i\#}) = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}\, \beta_{j\#} + \sum_{k=1}^{r} y_{ik}\, \xi_{k\#}$$

なる形を持つ。更に nice basis の定義から induce される $\pi_n(F_0)$ の自己同型 ψ' として

$$\psi'(\alpha_{i\#}) = \sum_{j=1}^{r} z_{ij}\, \alpha_{j\#}$$

なるものを考え，$X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})$, $Z=(z_{ij})$ とおく。

<u>補題4</u>，$n \geqq 4$ の時，$\{\psi(\alpha_{i\#})\}, \{\psi(\beta_{i\#})\}$ が nice basis となる $\iff$ $X={}^tZ^{-1}$，かつ $Y \cdot {}^tX$ が mod 2 で対称。

証明） F_0 上の intersection number が $\langle \psi'(\alpha_i), \psi(\beta_j) \rangle = \delta_{ij}$ を満たす事から，$X={}^tZ^{-1}$ が得られる。また定義及び障害理論から $\lambda(\xi_{i\#}, \xi_{j\#}) = \lambda(\beta_{i\#}, \beta_{j\#}) = 0$，$\lambda(\beta_{i\#}, \xi_{j\#}) = \delta_{ij}$

となる。従って

$$0 = \lambda(\psi(\beta_{i\#}), \psi(\beta_{j\#}))$$
$$= \sum_k x_{ik} \sum_l y_{jl} \lambda(\beta_{k\#}, \xi_{l\#}) + \sum_k y_{ik} \sum_l x_{jl} \lambda(\xi_{k\#}, \beta_{l\#})$$

この式が $Y \cdot {}^tX \pmod 2$ が対称であることを示す。

逆も容易である。$K = \overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} (S_i^n \perp S_i^{n+1})$ (disjoint union) を考える。(ここで $S_i^n \perp S_i^{n+1}$ は, S_i^n と S_i^{n+1} が transversal に交わる事を意味する)。$f: K \longrightarrow F_0$ を, 各 sphere に制限した時 C^∞ embedding となる様な 1対1 写像とする。以下この様な埋め込みを proper embedding と呼ぶ。更に $f(S_i^{n+1})$ が $\psi(\beta_{i\#})$ を represent し, $f(S_i^n)$ が $\psi'(\alpha_{i\#})$ を represent する様に取る。F' を $f(K)$ の smooth 正則近傍の boundary connected sum したものとすれば $F - \mathrm{Int}\, F'$ が h-cobordism であることが示される。 <終>

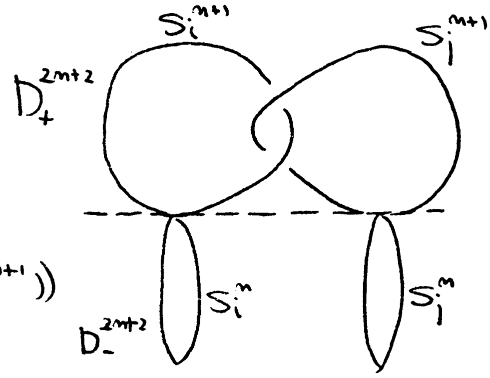
補題1の証明) 前の補題によって F_0 の handle 分解の取り換えがわかった。今 ϕ を base 変換の写像で, $(L(t), V(t))$ を与える nice basis に関し (X, Y) なる行列表示が出来たとしよう。この時 ${}^tZ^{-1} = X$ である事から ${}^tX^{-1} \cdot V(t) \cdot {}^tX$ が新しい basis に関する Seifert matrix であることが分かる。また

$$l'(\sum_k x_{ik} \beta_{k\#} + \sum_k y_{ik} \xi_{k\#}, \sum_l x_{jl} \beta_{l\#} + \sum_l y_{jl} \xi_{l\#})$$
$$= \sum_k x_{ik} \sum_l x_{jl} l'(\beta_{k\#}, \beta_{l\#}) + \sum_k x_{ik} \sum_l y_{jl} l'(\beta_{k\#}, \xi_{l\#})$$
$$+ \sum_k y_{ik} \sum_l x_{jl} l'(\xi_{k\#}, \beta_{l\#})$$

ここで $l'(\xi_{k\#},\beta_{l\#})\equiv l(\alpha_k\otimes\beta_l) \bmod 2$ ，$l'(\beta_{k\#},\xi_{l\#})\equiv \delta_{kl}-l(\alpha_l\otimes\beta_k) \bmod 2$ であることを用いれば，新しい基底に関し，$X\cdot V(k)\,{}^tX + X\cdot(E-{}^tL(k))\,{}^tY + Y\cdot L(k)\cdot {}^tX$ であることが分かる。 ＜終＞

§4 定理1の証明

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ を与えられた行列とする。今 $f: K\to S^{2n+2}$ proper embedding として次を満たすものを取る。すなわち標準的な分解 $S^{2n+2}=D_+^{2n+2}\cup D_-^{2n+2}$ ，$D_+^{2n+2}\cap D_-^{2n+2}=S^{2n+1}$ に対して （右図参照）



$$
\begin{cases}
f(S_i^{n+1})\subset D_+^{2n+2}\\
f(S_i^{n})\subset D_-^{2n+2}\\
f(K)\cap S^{2n+1}=\bigcup_{i=1}^{r}\left(f(S_i^{n}\cap S_i^{n+1})\right)\\
L'(f(S_i^{n+1}),f(S_j^{n+1}))=b_{ij}
\end{cases}
$$

さて，W を $f(K)$ の S^{2n+2} における smooth 正則近傍の連結成分を，boundary connected sum したものとし，$W'=S^{2n+2}-\mathrm{Int}\,W$ とする。

Step 1. ∂W の homological な性質

$H_n(W)$ の $f(S_i^n)$ によって represent される生成元を u_i，同様に $H_{n+1}(W)$ の $f(S_i^{n+1})$ によって represent される生成元を v_i とする。さて，

$$A : H_n(W) \overset{\partial^{-1}}{\cong} H_{n+1}(S^{2n+2}, W) \overset{exc^{-1}}{\cong} H_{n+1}(W', \partial W) \overset{P.D}{\cong} H^{n+1}(W') \overset{D}{\cong} H_{n+1}(W')$$

$$A' : H_{n+1}(W) \cong H_{n+2}(S^{2n+2}, W) \cong H_{n+2}(W', \partial W) \cong H^{n}(W') \cong H_n(W')$$

なる同型に対し，$A(u_i) = v_i^*$ ，$A'(v_i) = u_i^*$ と書く。

$$\varphi_n : H_n(W) \cong H_{n+1}(S^{2n+2}, W) \cong H_{n+1}(W', \partial W) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial W)$$

$$\varphi_n' : H_n(W') \cong H_{n+1}(S^{2n+2}, W') \cong H_{n+1}(W, \partial W) \longrightarrow H_n(\partial W)$$

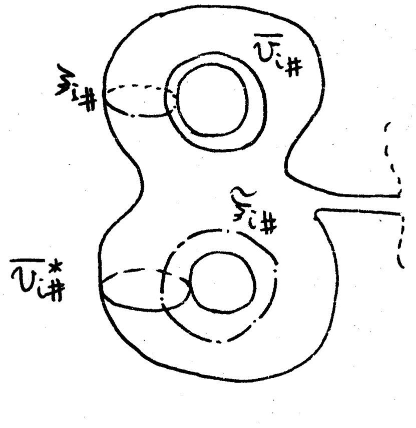
$$\varphi_{n+1} : H_{n+1}(W) \cong H_{n+2}(S^{2n+2}, W) \cong H_{n+2}(W', \partial W) \longrightarrow H_{n+1}(\partial W)$$

$$\varphi_{n+1}' : H_{n+1}(W') \cong H_{n+2}(S^{2n+2}, W') \cong H_{n+2}(W, \partial W) \longrightarrow H_{n+1}(\partial W)$$

なる準同型に対して，$\varphi_n(u_i) = \overline{u_i}$ ，$\varphi_n'(u_i^*) = \overline{u_i}^*$，$\varphi_{n+1}(v_i) = \overline{v_i}$，$\varphi_{n+1}'(v_i^*) = \overline{v_i}^*$ と書く。この時，Mayer-Vietoris 完全列を用いる事によって，$H_n(\partial W)$, $H_{n+1}(\partial W)$ はそれぞれ $\{\overline{u_i}, \overline{u_i^*}\}$, $\{\overline{v_i}, \overline{v_i^*}\}$ によって生成され，更に ∂W 上で $<\overline{u_i}, \overline{v_j}^*> = <\overline{u_i}^*, \overline{v_j}> = \delta_{ij}$ ，$<\overline{u_i}, \overline{v_j}> = <\overline{u_i}^*, \overline{v_j}^*> = 0$ であることが分かる。

<u>Step 2</u> $\pi_{n+1}(\partial W)$ に関する性質

$\pi_{n+1}(\partial W)$ の free part の basis として下図の様な canonical なものが有る。すなわち，S_i^n 上の D^{n+2}-bundle の associated sphere bundle の fiber 及び，S_i^{n+1} 上の D^{n+1}-bundle の associated sphere bundle の trivial section である。（ここで trivial とは，section と S_i^{n+1} が link して



いない事を意味する)。これらを $\{\bar{v}^*_{i\#}\}$ $\{\bar{v}_{i\#}\}$ と書く。更に $\pi_{n+1}(\partial W)$ の $\mathbb{Z}_2$-part の basis として同様に canonical なもの が取れる。即ち, canonical な $\pi_n(\partial W)$ の basis に $\pi_{n+1}(S^n)$ の生成元を compose したもので, それらを $\{\xi_{i\#}\}$ $\{\tilde{\xi}_{i\#}\}$ と書く。結局 $\pi_{n+1}(\partial W)$ は, $\{\bar{v}_{i\#}\}$, $\{\bar{v}^*_{i\#}\}$, $\{\xi_{i\#}\}$, $\{\tilde{\xi}_{i\#}\}$ によって生成され, 更に $\bar{v}_{i\#}$, $\bar{v}^*_{i\#}$ の Hurewicz 準同型による image が $\bar{v}_i$, $\bar{v}_i^*$ であることが分かる。

さて, $f':K \longrightarrow \partial W$ proper embedding で

$$f'_{\#}(S_i^{n+1}) = \bar{v}_{i\#} + b_{ii}\xi_{i\#} + \sum_{j=1}^{r} a_{ji}\bar{v}^*_{j\#}$$

$$f'_{\#}(S_i^{n}) = \bar{u}_{i\#} + \sum_{j=1}^{r} (\delta_{ij} - a_{ij})\bar{u}^*_{j\#}$$

を満たすものが存在する。なぜなら, $\pi_i(\partial W) = 0$ $(i \leqq 3)$ で $\langle f'_*(S_i^{n+1}) \cdot f'_*(S_j^n) \rangle = \delta_{ij}$, ~~[illegible]~~ $\lambda(f'_{\#}(S_i^{n+1}), f'_{\#}(S_j^{n+1})) = 0$ であることから, Whitney の trick, 及び補題3を用いることが出来るからである。そこで $f'(K)$ の ∂W における smooth 正則近傍の連結成分の boundary connected sum したものを F_0, また $\partial W - \mathrm{Int}\, F_0 = F_0'$ とする。

<u>Step 3</u>　S^{2n+2} は F_0 を fiber とする fibered knot の構造を持つ。

今 $j: F_0 \longrightarrow W$, $j': F_0 \longrightarrow W'$ を inclusion とする時

$$j_*: H_n(F_0) \longrightarrow H_n(W) \qquad j_*(f'_*(S_i^n)) = u_i$$

$$j_*: H_{n+1}(F_0) \longrightarrow H_{n+1}(W) \qquad j_*(f'_*(S_i^{n+1})) = v_i$$

$$j'_*: H_n(F_0) \longrightarrow H_n(W') \qquad j'_*(f'_*(S_i^n)) = \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}) u_j^*$$
$$j'_*: H_{n+1}(F_0) \longrightarrow H_{n+1}(W') \qquad j'_*(f'_*(S_i^{n+1})) = \sum_j a_{ji} v_j^*$$

であるから，A が s-unimodular であることからすべて同型。更に，W, W', F_0, F_0' は simply connected であるから $(W; F_0, F_0')$ $(W'; F_0', F_0)$ は relative h-cobordism 。従がって $g(F_0 \times [0,\pi]) = W$, $g(F_0 \times [\pi, 2\pi]) = W'$ によって S^{2n+2} に fibered knot の構造が入る。

Step 4　$L(k) = A$

$f'_*(S_i^n) = \alpha_i$, $f'_*(S_i^{n+1}) = \beta_i$ とする。このとき

$$\begin{aligned} l_{ij} &= L((g_0)_*(\alpha_i), (g_{-\pi})_*(\beta_j)) \\ &= L((g_{\pi/2})_*(\alpha_i), (g_{-\pi/2})_*(\beta_j)) \\ &= L(u_i, \textstyle\sum_k a_{kj} v_k^*) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

Step 5　$V(k) = B$

$$\begin{aligned} v_{ij} &= L'((g_0)_\#(f'_\#(S_i^{n+1})), (g_{-\pi})_\#(f'_\#(S_j^{n+1}))) \\ &= L'((g_{\pi/2})_\#(f'_\#(S_i^{n+1})), (g_0)_\#(f'_\#(S_j^{n+1}))) \end{aligned}$$

ここで $(g_{\pi/2})_\#(f'_\#(S_i^{n+1}))$ は $f(S_i^{n+1})$ によって represent されていると考えてよいから，これと，$(g_0)_\#(f'_\#(S_j^{n+1})) = \overline{v}_{j\#} + b_{jj}\xi_{j\#} + \sum_k a_{kj}\overline{v}_k^*$ との link をみる。明らかに，$\sum_k a_{kj}\overline{v}_k^*$ との link はないから，$\overline{v}_{j\#} + b_{jj}\xi_{j\#}$ を sphere の embedding で実現してやれば，f の定義から $v_{ij} = b_{ij}$

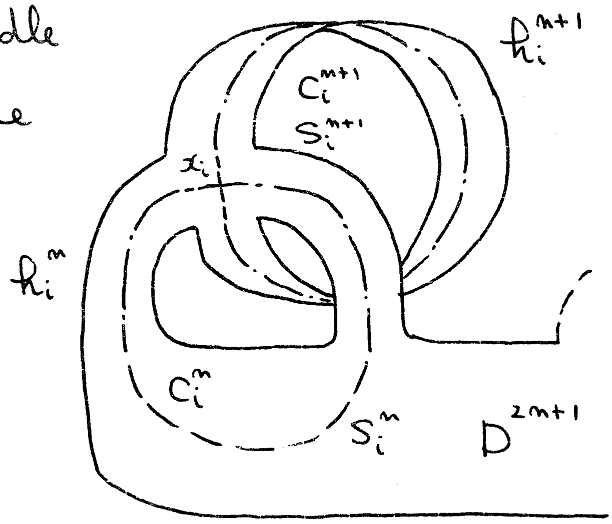
が得られる。　　　　　　　　　　　　　＜終＞

§5　定理2の証明

simple と云う仮定から，F_0 は下図の様な handle 分解を持つと考えてよい。すなわち

$$F_0 = D^{2n+1} \cup ((h_1^n) \cup (h_1^{n+1})) \cup \cdots \cup ((h_r^n) \cup (h_r^{n+1}))$$

として，C_i^n, C_i^{n+1} を n-handle h_i^n, $(n+1)$-handle h_i^{n+1} の core とする時，C_i^{n+1} は S_i^{n+1} に拡張され，C_i^n と唯一点で transversal に交わる。この交点を x_i とする。



<u>補題5.</u> $k_1 = \{F_0, h, g\}$, $k_2 = \{F_0', h', g'\}$ を simple fibered knot とする。この時，$(L(k_1), V(k_1)) \sim (L(k_2), V(k_2)) \Longrightarrow F_0$ と F_0' は S^{2n+2} において isotopic.

証明）　§3 の結果から，$(L(k_1), V(k_1)) = (L(k_2), V(k_2))$ と仮定してよい。また，F_0, F_0' の handle 分解を，それらの basis に忠実なものをとることにする。

$$F_0 = D^{2n+1} \cup ((h_1^n) \cup (h_1^{n+1})) \cup \cdots \cup ((h_r^n) \cup (h_r^{n+1}))$$

$$F_0' = D^{2n+1'} \cup ((h_1^{n'}) \cup (h_1^{n+1'})) \cup \cdots \cup ((h_r^{n'}) \cup (h_r^{n+1'}))$$

以降簡単の為，記号として S^{2n+2} の中で isotopic と云う替りに ＝ を用いる。まず，$D^{2n+1}=D^{2n+1'}$ と仮定してよい。更に次元の仮定から $C_i^n=C_i^{n'}$，$x_i=x_i'$ としてよい。

Step 1　$h_i^n=h_i^{n'}$

今，C_i^n の S^{2n+2} に於ける tubular nbd $N=C_i\times D^{n+2}$ を考える。a_i を C_i^n 上の h_i^n に対する positive unit normal vector field とする。a_i は $\bar{N}=C_i\times\partial D^{n+2}$ の section と見做せる。a_i' を a_i と同様に，$h_i^{n'}$ に対する法ベクトル場とすれば，$\bar{N}$ 上の ∂C_i で一致した二つの section が得られる。∂C_i で fix された section の homotopy class は $\pi_n(S^{n+1})=0$ であることから unique。すなわち a_i, a_i' は $\bar{N}$ で isotopic である。従って，その N における orthogonal complement が $h_i^n, h_i^{n'}$ と考えてよいから，$h_i^n=h_i^{n'}$ となる。

Step 2　$h_i^{n+1}=h_i^{n+1'}$

tubular neighborhood の一意性を用いて，$h_i^{n+1}, h_i^{n+1'}$ の attaching sphere は一致してるとしてよい。まず，$C_i^{n+1}=C_i^{n+1'}$ を示そう。今 b_i を C_i^{n+1} の h_i^{n+1} に対する positive unit normal vector field とする。b_i' も同様に定める。C_i^n を S_i^n に拡張して考えると，b_i，$\cancel{b_i'}$ が S_{i+}^{n+1} を表わすと見做せば（即ち S_i^{n+1} を正方向に少し動かしたもの），link $S_1^n\cup\cdots\cup S_r^n\cup S_{1+}^{n+1}\cup\cdots\cup S_{r+}^{n+1}\subset S^{2n+2}$ が出来る。こ

の link の isotopy class は，Haefliger の結果から，$L(S_i^m, S_{j+}^{m+1})$，及び $L'(S_{i+}^{m+1}, S_{j+}^{m+1})$ $i<j$ の元と1対1に対応している。ところがそれらは l.p 行列の成分によって表わされているから，$\mathbb{b}_i$, $\mathbb{b}_i'$ によって出来る二つの link は isotopic である。従って $C_i^{m+1} = C_i^{m+1\prime}$ としてよい。さて，C_i^{m+1} の S^{2m+2} における tubular nbd $N = C_i^{m+1} \times D^{m+1}$ に対し $\mathbb{b}_i$ $\mathbb{b}_i'$ は $\dot{N} = C_i^{m+1} \times \partial D^{m+1}$ の ∂C_i^{m+1} 上一致した section と見做せる。此の section としての homotopy class は $\pi_{m+1}(S^m) \cong \mathbb{Z}_2$ の元によって表現されるが，適当な framing に対して，この元は $V(f_2)$ の i, i 成分と一致している。従って $\mathbb{b}_i$ $\mathbb{b}_i'$ は $\dot{N}$ と isotopic で，前と同様に h_i^{m+1}, $h_i^{m+1\prime}$ は；その N における orthogonal complement と考えられるから，$h_i^{m+1} = h_i^{m+1\prime}$ を得る。

以上の操作を行なう事によって $F_0 = F_0'$ が示された。

〈終〉

定理2の証明）補題5によって，isotopy $H_t : S^{2m+2} \to S^{2m+2}$ として，$H_0 = id$，$H_1(F_0) = F_0'$ を満たすものが存在する事が云えた。後は Cerf の定理を用いる事によって示される。詳~~略~~細は，Kato(4) 或いは Durfee(1) がすでに示した事と，全く同じであるから，それらを参照されたい。

〈終〉

References

(1) A.H. Durfee; Fibered knots and algebraic singularities, Topology 13 (1974) 47 ~ 59

(2) A. Haefliger; Plongements differentiables de variétés dans variétés, Comm. Math. Helv. 36 (1961) 47 ~ 82

(3) A. Haefliger; Differentiable links, Topology 1 (1962) 241 ~ 244

(4) M. Kato; A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold, J. Math. Soc. Japan 26 (1974) 454 ~ 463

(5) J. Levine; An algebraic classification of some knots of codimension two, Comm. Math. Helv. 45 (1970) 185 ~ 198

(6) J. Levine; Polynomial invariants of knots of codimension two, Ann. of Math. 84 (1966) 537 ~ 554

(7) I. Tamura; Classification des variétés differentiable (n−1) connexes sans torsion de dimension 2n+1, Seminaire H. Cartan 15 e année 1962/63 n° 16 à 19

(8) C.T.C. Wall; Classification problem in differential topology I, II, Topology 2 (1963) 253 ~ 261, 263 ~ 272