

非線形振動からの問題提起 2 件

京大 工 上田 暁亮

Ⅰ部 可飽和鉄心をもつ直列共振回路の定常振動

1. はじめに

本報告において、定常振動とは電気回路に持続する定常状態を意味する。線形回路における定常振動は、回路を記述する線形微分方程式の定常解として定義されているが、非線形回路における定常振動の体系づけは現在なお確立されていない。これは非線形現象の複雑さのみならず、解析法ならびに基礎的な諸概念の研究が発達していなかったことによると考えられる。

本報告では、正弦波電圧の印加された可飽和鉄心をもつ直列共振回路における定常振動の体系づけを、微分可能な力学系の理論を用いて試み、定常振動を三種類の型に分類した。また、対象とした回路は最も簡単かつ基本的な非線形回路で

あるにもかかわらず、現象を正確に記述することは今なお困難であることが明らかとなり、未解決の問題点が指摘された。

## 2. 微分方程式と微分可能な力学系

### 2.1 微分方程式

図1に可飽和鉄心をもつ直列共振回路を示す。図に示した記号を用いれば次の回路方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} n \frac{d\phi}{dt} + R i_R &= E \sin \omega t \\ R i_R &= \frac{1}{C} \int i_C dt, \quad i = i_R + i_C \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに  $n$  はコイルの巻数であり、 $\phi$  は鉄心中の磁束である。鉄心のヒステリシスを無視し、磁化特性は三次曲線

$$i = a\phi^3 \quad (2)$$

で表わされる場合を考える。電流および磁束の無次元変数  $u$  および  $v$  を次式

$$i = I \cdot u, \quad \phi = \Phi \cdot v \quad (3)$$

で導入する。ここに  $I$  および  $\Phi$  は単位量であり、次の

関係式

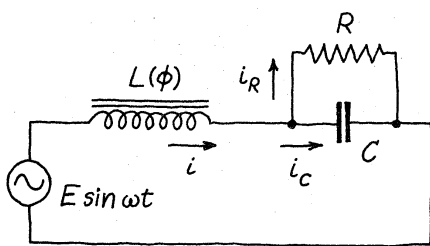


図1 可飽和鉄心をもつ直列共振回路

$$n\omega^2 C\Phi = I, \quad a\Phi^3 = I \quad (4)$$

を満たすように定めるものとする。(1)~(4)式から  $v$  に関する方程式を導けば, Duffing 方程式

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k \frac{dv}{d\tau} + v^3 = B \cos \tau \quad (5)$$

ここに,

$$\tau = \omega t - \tan^{-1} k, \quad k = \frac{1}{\omega CR}, \quad B = \frac{E}{n\omega\Phi} \sqrt{1+k^2}$$

を得る。

## 2.2 微分可能な力学系

(5)式を新たに変数  $t, x, y$  を用いて一階連立形

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B \cos t \quad (6)$$

に書き換える。(6)式右辺は  $t$  に関し周期  $2\pi$  をもち, 三次元実数空間  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ :  $t, x, y$  で定義された関数である。

$t=0$  のとき  $xy$  平面上の任意の点  $p_0(x_0, y_0)$  を通る(6)式の解を  $x = x(t, x_0, y_0)$ ,  $y = y(t, x_0, y_0)$  とし,  $p_1(x_1, y_1)$  を  $x_1 = x(2\pi, x_0, y_0)$ ,  $y_1 = y(2\pi, x_0, y_0)$  と定めれば, 平面  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^\infty$  微分同相写像

$$\left. \begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p_0 &\mapsto p_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

すなわち,  $\mathbb{R}^2$  上の  $C^\infty$  級離散力学系が定義される。

以下に本論で用いる構造安定性について述べる。

微分同相写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を特徴づけるパラメータ  $\lambda$ ,  $B$  を明示するため,

$$\lambda = (\lambda, B) \in \Lambda \quad (8)$$

とおき, 写像を  $f_\lambda$  と表わすことにする。  $\lambda, B$  平面上の或る部分集合  $\Lambda$  に対して集合  $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  を考える。

$f_\lambda$  がパラメータ  $\lambda$  の摂動に関し構造安定であるとは, パラメータ  $\lambda$  の適当な近傍  $U(\lambda)$  があって, 任意の  $f_{\lambda'} \in \{f_\mu \mid \mu \in U(\lambda)\}$  は  $f_\lambda$  と位相的に共役となるときをいう。また,  $f_\lambda$  と  $f_{\lambda'}$  が  $\Omega$  上で位相的に共役となるとき,  $f_\lambda$  はパラメータ  $\lambda$  の摂動に関し  $\Omega$  安定であるという。以下では簡単のため, パラメータ  $\lambda$  の摂動に関し, 構造安定あるいは  $\Omega$  安定ということをも単に  $\lambda$ -構造安定, あるいは,  $\lambda$ - $\Omega$  安定ということにする。

### 3. 定常振動の体系づけ

本章ではまず, 可飽和鉄心をもつ直列共振回路に発生する定常振動のうち, 最も一般的な型と考えられる不規則遷移振動の実例を挙げ, その発生機構を考察する。次に, これから派生する問題を整理する。最後に, この回路に生じる定常振動を実験的に観測されるアトラクターにもとづいて分類する。

### 3.1 不規則遷移振動

図1の電気回路において、電源電圧や回路定数の或る範囲にわたり、非周期的な定常振動の発生することがある。図2はパラメータを

$$\lambda = (\tau, B) = (0.1, 12.0) \quad (9)$$

とした系に持続する二種類の定常振動波形を示す。図2(a)は高調波成分を顕著に含む周期振動である。図において、上

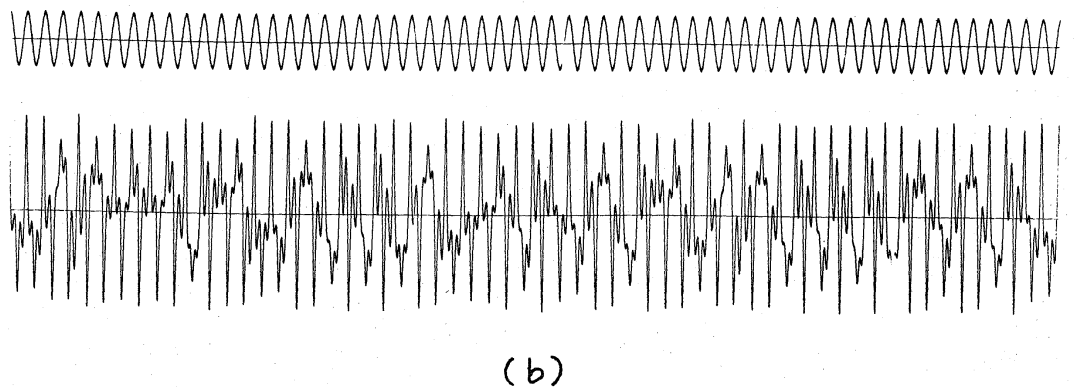
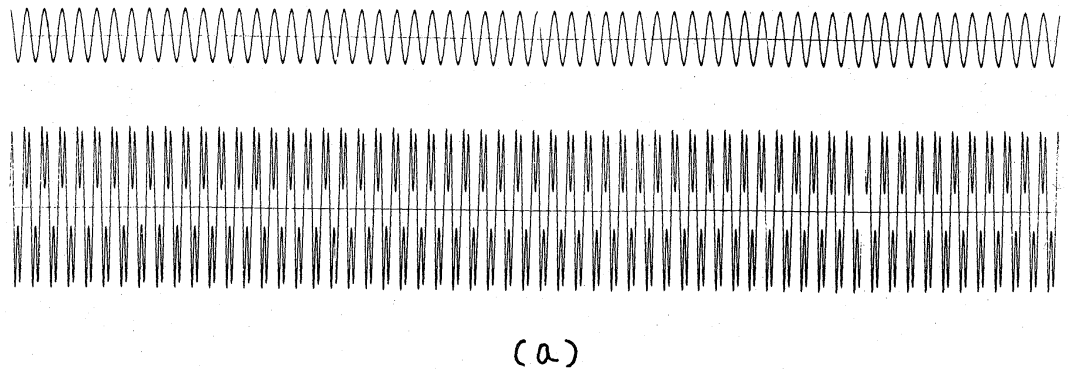


図2 (9)式で規定される系における定常振動波形

(a) 周期振動 (b) 非周期振動

の波形は印加電圧を、下の波形は磁束を表わしている。図2  
 図(b)は非周期的な定常振動であって、この振動を長時間観  
 測した軌道を図3図に示す。この軌道の詳細(像の位置およ  
 び運動)は観測ごとに異なるが、軌道の概略(位置、形状、  
 大きさ)は観測時に関係なく同じであって、実測されるアト  
 ラクターを表わしている。図4図は対応する微分同相写像  
 $f_n$ の不動点(正および逆不安定点) ${}^1D^1$ ,  ${}^1I^1$ ,  ${}^2I^1$ およ  
 び ${}^1D^1$ の不安定および安定多様体 $W^u({}^1D^1)$ ,  $W^s({}^1D^1)$ の  
 概略を示している。不安定多様体(図中太線)を図に示す以  
 上に延長すれば、図3図の軌道の概形に近づく。つまり、鞍  
 点 ${}^1D^1$ の不安定多様体の閉包 $\overline{W^u({}^1D^1)}$ が図2図(b)の非周  
 期振動を表わすアトラクター $M$ と考えられる。図5図は、  
 この場合の微分同相写像の大域的な位相面構造を示す。鞍点  
 (正不安定不動点) ${}^2D^1$ の安定多様体 $W^s({}^2D^1)$ (図中太線)  
 が二つの吸引領域の境界であり、沈点(完全安定不動点) $S^1$   
 が図2図(a)の周期振動を表わすアトラクターである。

以上の実験結果は次のように整理される。

1) 非周期的な定常振動は、系に作用する擾乱や系の擾動の  
 影響を受け、観測ごとに異なる軌道を描く。つまり、確率統  
 計的な性質を表わしている。

2) 非周期的な定常振動を表わすアトラクター $M$ は鞍点 ${}^1D^1$

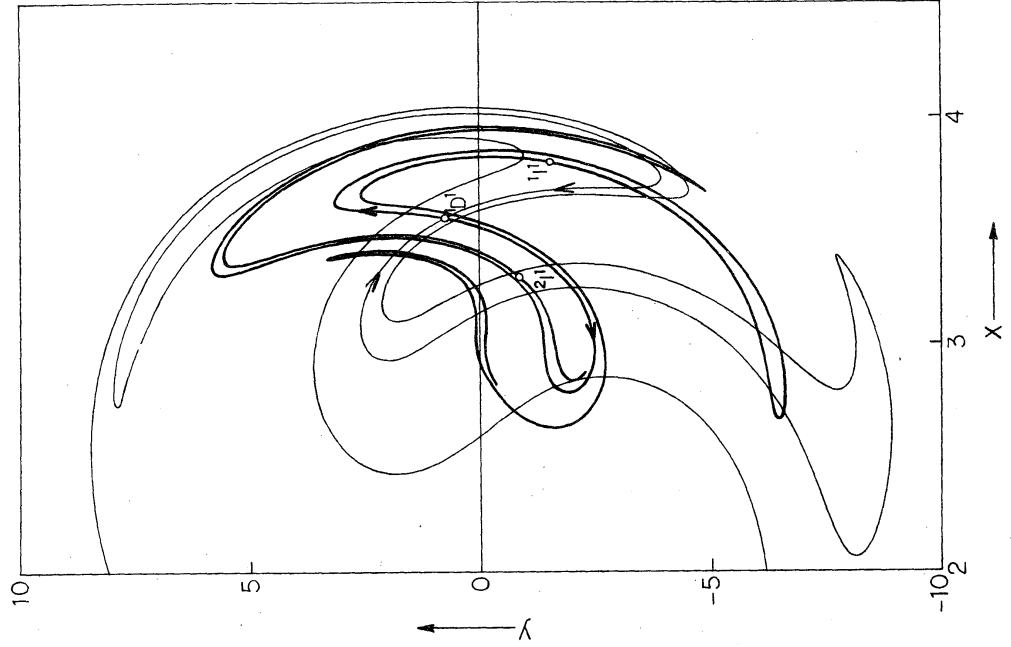


図4 正不安定不動点  $D1$  の不安定および安定多様体

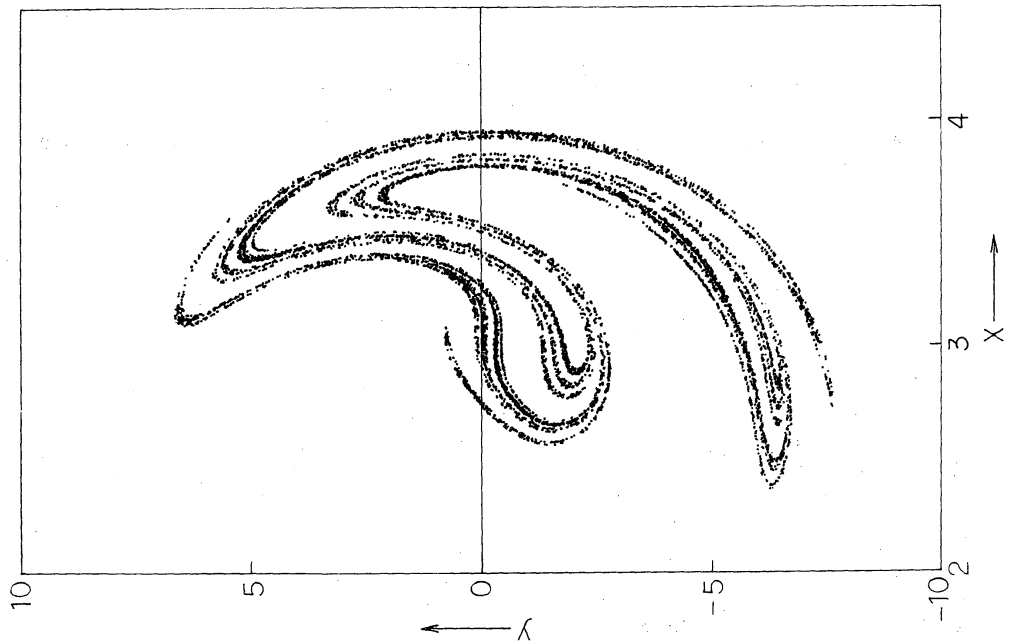


図3 実測軌道

の不安定多様体の閉包,  
すなわち  $M = \overline{W^u(1D^1)}$   
と考えられる。さらに,  
実験的には  $M$  の軌道は  
正ポアソン安定であると  
みなされる。

3) 鞍点  $1D^1$  の安定, 不  
安定多様体  $W^s(1D^1)$ ,  
 $W^u(1D^1)$  は互に交差し,  
ホモクリニックサイクル  
を構成している。しかも,  
大部分の交点では横断的  
に交わっているが, 図4  
図の  $(2.8, -2.0)$  附近  
に見られるように,  $W^s$   
 $(1D^1)$ ,  $W^u(1D^1)$  を図示

した以上に延長すれば, 横断的に交わらない接点の現われう  
る事が予想される。

4) ホモクリニック点の存在は,  $M$  が無数の周期軌道を含  
むことを示している。実験的には各周期軌道は漸近安定性を  
もたない, すなわち,  $M$  の中に沈点は存在しないとみなさ

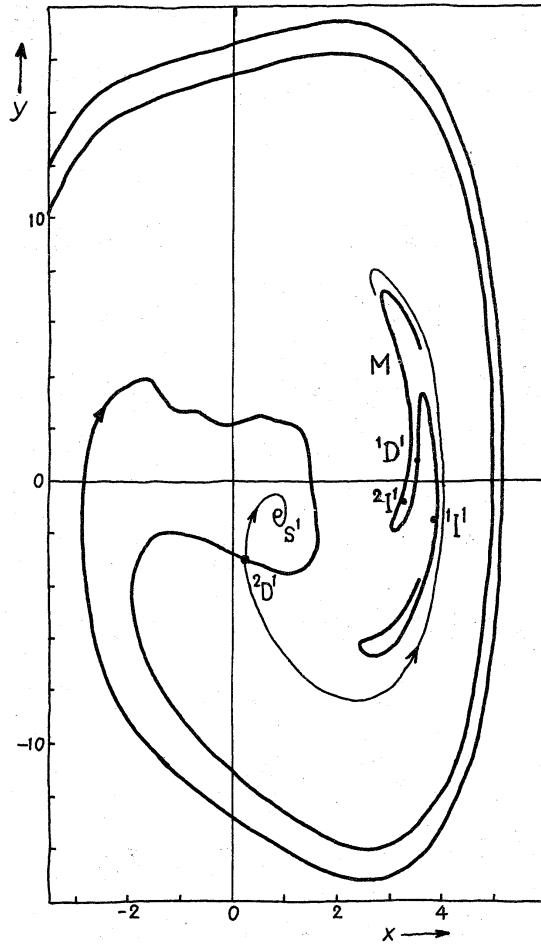


図5 微分同相写像  $f_\lambda$ ,  
 $\lambda = (0.1, 12.0)$  の大域的  
位相面構造



れる。これはたとえ沈点が存在しても、その吸引領域は狭く、系に作用する擾乱や系の摂動の影響でおおわれることを意味している。

以上の事から、この型の振動を不規則遷移振動と呼んだ。<sup>(1)</sup>

### 3.2 問題点の整理

前節の考察から派生した未解決の問題を以下に列挙する。

1)  $\Omega(f)$  は  $M = \overline{W^u(D^1)}$  に一致するか、あるいは、 $M$  の真部分集合か。 $\Omega(f)$  はホモクリニック点以外に周期軌道でない極小集合を含むか。 $\Omega(f)$  の分解は。

ここに、 $\Omega(f)$  は  $M$  の吸引領域内の非遊走点集合とする。

2) 微分同相写像  $f_\lambda$ ,  $\lambda = (\epsilon, B) = (0.1, 12.0)$  は  $\lambda$ -構造安定か。 $\lambda$ - $\Omega$ 安定性はどうか。 $\epsilon B$  平面上的不規則遷移振動の発生領域を  $A_0$  とする。 $f_\lambda$  ( $\lambda \in A_0$ ) が  $\lambda$ -構造安定であること、あるいは  $\lambda$ - $\Omega$ 安定であることはパラメータ  $\lambda$  に関し生成的な性質か。

微分同相写像  $f_\lambda$  が  $\lambda$ -構造安定でも  $\lambda$ - $\Omega$ 安定でもないとすれば、これらの安定条件は強すぎることになる。このような場合、より現実に即した構造安定条件は。

3) 実験的には、アトラクター  $M$  の軌道は正ポアソン安定とみなされる。この実験的に観測される疑回帰性はどのように説明されるのか。また、上記問題 1) および 2) との関

連は。

### 3.3 定常振動の分類

表 1 損失のある表 1 図の回路における  
定常振動

	実測されるアトラクター	定常振動
1	不動点	基本調波振動
2	周期軌道	分数調波振動
3	正ホアッソン安定で、無数の周期軌道を含む不変なコンパクト集合	不規則遷移振動

損失のある回路に発生する定常振動は、実測されるアトラクターの構造により表 1 のように分類される。非線形振動論においては、表中表 1 および表 2 項の基本調波および分数調波振動は、それらの振動が高調波成分を顕著に含むときは、それぞれ高調波および高調波的分数調波振動と呼ばれているが、ここではこれらの点に言及しない。また、表中円周に同位相のアトラクター（極小集合）が存在しないのは、損失の存在により  $f$  は面積減少型となり、 $f$  不変な最大コンパクト集合  $\Delta(f)$  の面積が零であることから明らかであろう。表 1 および表 3 項の実例は前節に挙げた。表 2 項の実例は概に報告した<sup>(2)(3)</sup>。

## 4. むすび

可飽和鉄心をもつ直列共振回路に発生する定常振動の体系づけを微分可能な力学系の理論を用いて試みた。その結果、定常振動と対応する微分同相写像のアトラクターとの関係を明らかにし、実測されるアトラクターの構造により定常振動を三種類の型に分類した。しかし、アトラクターの分解や構造安定性については未知の面が多く、問題点を指摘するに留まった。

この分野に興味をもつ研究者諸氏が上記諸問題に関心を寄せていただければ幸いである。

## 文 献

- (1) 上田, 赤松, 林: 電子通信学会論文誌, 56-A, 218 (昭48-4).
- (2) C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami: Int. J. Non-Linear Mechanics, 4, 235 (1969).
- (3) Y. Ueda: Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations (1968), Nippon Printing and Publishing Company.

## 才工部 遅延をもつ位相同期系の計算機実験

京大 工 上田 暁亮  
四国電力 赤股 義高

## 1. はじめに

位相同期系は通信、制御をはじめ工学のあらゆる分野において広く用いられている。たとえば、通信システムに限っても、その用途は発振器の同期化、信号の復調、信号の追跡、雑音の抑制および周波数の $n$ 倍や $n$ 減等多岐にわたっている。そのため、多くの技術者によって研究が行なわれ、設計理論もほぼ完成していると思われる。しかるに、最近では周波数帯の有効利用に伴ない、高周波帯において動作する位相同期系が必要となった。このような場合には、系の構成要素各部に生じる遅延時間の、系の動作に及ぼす影響が問題となるので、設計に際しては、遅延時間による特性の変化を十分明らかにしておく必要がある。

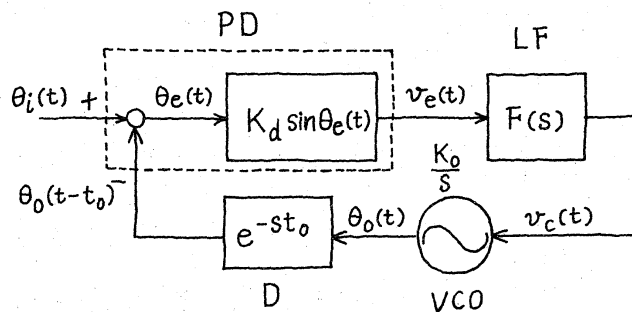
なかでも、定常位相誤差、雑音特性、安定性等、系が同期化に到達してから問題となる性質、いわば系の局所的性質は系を線形化することにより、かなりの程度まで議論が可能であり、既にいくつかの報告がなされている。しかし、同期

引込特性, 過渡特性のような系の大域的な性質は系の動作を記述する方程式が非線形微分差分方程式であり, その解の大域的な模様を問題としなければならぬため, その解析は急激に困難となる。この同期引込範囲を理論的に扱ったいくつかの報告もあるが, 解析に際して設けた仮定の妥当性については殆んど論じられていない。これは系を記述する非線形微分差分方程式の解が容易に得られないことによるものと考えられる。

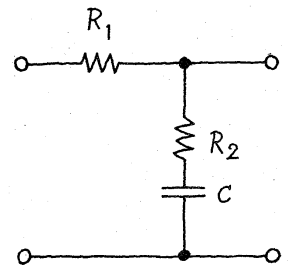
本報告では, 遅延を含む位相同期系の計算機実験結果の一部を紹介する。以下では, まず遅延を含む位相同期系の制御過程を記述する方程式を導く。つぎに, 実験結果の一部を紹介し, 問題点を整理する。

## 2. 系を記述する方程式の誘導

本報告で考察の対象とする系を $\text{Fig. 1}$ に示す。図において



$\text{Fig. 1}$  遅延をもつ位相同期系



$\text{Fig. 2}$  位相遅れフィルタ

PD は正弦状位相比較特性をもつ位相比較器を，LF は第2図に示すようなループフィルタ-を，VCO は電圧制御発振器を，D は系の構成要素各部に生じる遅延時間が集中的に存在するとした遅延要素を表わしている。図に示した記号を用いれば次の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} v_e(t) &= K_d \sin \theta_e(t) \\ v_c(t) &= \frac{\tau_2 \frac{d}{dt} + 1}{(\tau_1 + \tau_2) \frac{d}{dt} + 1} v_e(t) \\ \frac{d\theta_o(t)}{dt} &= K_o v_c(t) \\ \theta_e(t) &= \theta_i(t) - \theta_o(t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに， $K_d$  は PD の検出感度を， $K_o$  は VCO の制御感度を， $\tau_1 = R_1 C$  および  $\tau_2 = R_2 C$  は LF の時定数を， $t_0$  は D の遅延時間を表わす。(1)式から  $v_e(t)$ ， $v_c(t)$  および  $\theta_o(t)$  を消去すれば，

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_d K_o \frac{\tau_2 \frac{d}{dt} + 1}{(\tau_1 + \tau_2) \frac{d}{dt} + 1} \sin \theta_e(t - t_0) = \frac{d\theta_i(t)}{dt} \quad (2)$$

を得る。ここでは，自走状態にある系に入力位相としてランフ位相，すなわち周波数ステップ

$$\theta_i(t) = \Delta\omega t \quad (3)$$

が印加される場合を考えることにする。(2), (3)式から系の制御過程を表わす非線形微分差分方程式

$$\frac{d\theta_e(\tau)}{d\tau} + \frac{(2\zeta - \beta)\frac{d}{d\tau} + 1}{\frac{d}{d\tau} + \beta} \sin\theta_e(\tau - L) = \frac{\delta}{\beta} \quad (4)$$

$$\text{ここに, } \tau = \omega_n t, \quad L = \omega_n t_0$$

$$\beta = \frac{\omega_n}{K}, \quad \delta = \frac{\Delta\omega}{K}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\tau_1 + \tau_2}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1 + K\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

$$K = K_d K_0$$

(5)

を得る。ここに,  $K$  および  $\omega_n$  はそれぞれループの利得および自然周波数であり, パラメータ  $\zeta$  は減衰係数を,  $L$ ,  $\beta$  および  $\delta$  はそれぞれ正規化された遅延時間, 自然周波数および周波数差を表わしている。(4)式は次のように表わすことも出来る。

$$\frac{d^2\theta_e(\tau)}{d\tau^2} + \beta \frac{d\theta_e(\tau)}{d\tau} + (2\zeta - \beta) \cos\theta_e(\tau - L) \frac{d\theta_e(\tau - L)}{d\tau} + \sin\theta_e(\tau - L) = \delta \quad (6)$$

図1の位相同期系がループフィルタを含まない場合には、  
上と同様にして系の制御過程を表わす方程式

$$\frac{d\theta_e(\tau)}{d\tau} + \sin\theta_e(\tau-L) = \delta \quad (7)$$


$$\text{ここに, } \tau = Kt, \quad L = Kt_0, \quad \delta = \frac{\Delta\omega}{K} \quad (8)$$

を得る。(4)あるいは(6)式で記述される系は2次ループ、  
(7)式で記述される系は1次ループと呼ばれている。

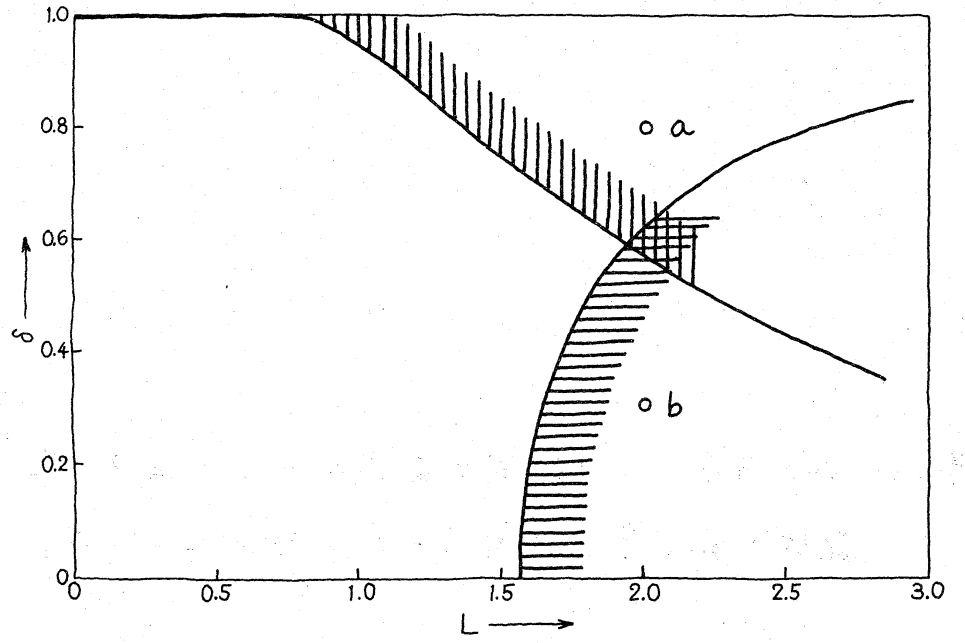
### 3. 実験結果

以下に実験結果の一部を挙げ簡単に説明する。

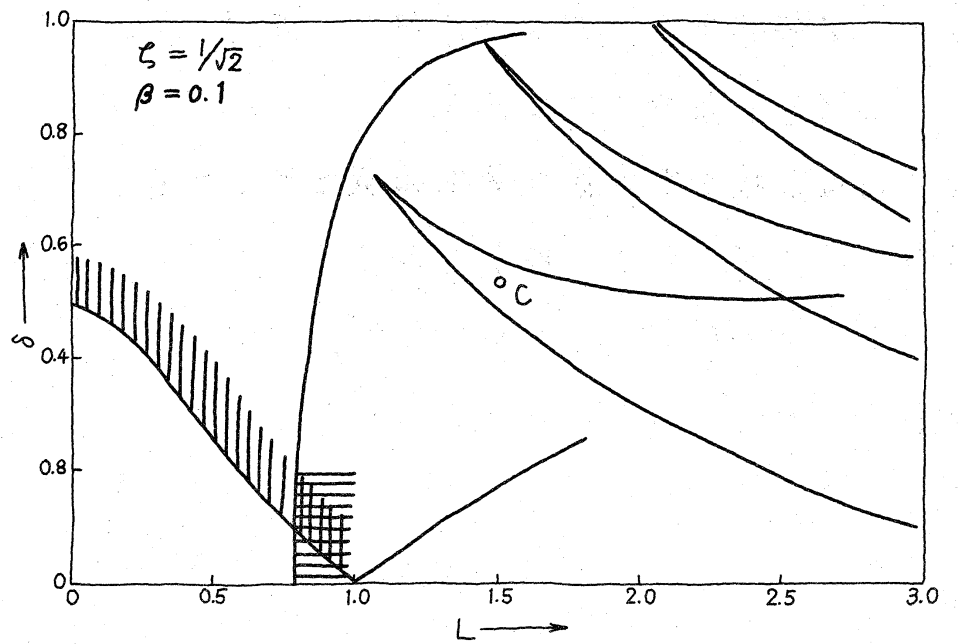
#### 3.1 各種定常状態の発生領域

図3は各種定常状態の発生領域を示したものである。図3(a)は1次ループの場合であり、 $L$ が小さいとき同期引込範囲(系の初期状態にかかわらず、同期引込が達成される周波数差の範囲、すなわち、定常状態としては安定な平衡点がただ一つ存在するようなパラメータ範囲)は  $0 \leq \delta < 1$  であるが、 $L > 0.8$  では  $L$  の増加に伴ない図のように狭くなって来る。図中  を施した領域では、非同期平衡状態(2種周期解に対応する)と同期引込状態が共存し、何れの状態が生じるかは系の初期状態により決定される。 $L > 1.57$






(a)



(b)

図3 各種定常状態の発生領域

の  を施した領域では、同期引込状態を表わす平衡点は不安定となり、(才1種の)周期解で表わされるような非同期平衡状態が観測される。才3図(b)は  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  ,  $\beta = 0.1$  とした2次ループの場合である。図に見るように、同期引込領域は狭くなるが、工学的には雑音特性等が改善されるため、2次ループが広く用いられている。Lが大きくなれば系は同期化を達成出来ず非同期平衡状態に留まるが、才2種の周期解に対応する平衡状態が複数個現われたり、パラメータの変化に対してこれらの状態相互間を跳躍的に移行するなど、興味深い種々の現象が観測される。才3図(b)中の  $L > 1.0$  の部分の曲線は種々の非同期平衡状態の存在限界を示している。才4図に才3図中の点 a, b, c に対応する非同期平衡状態の振動波形を示す。

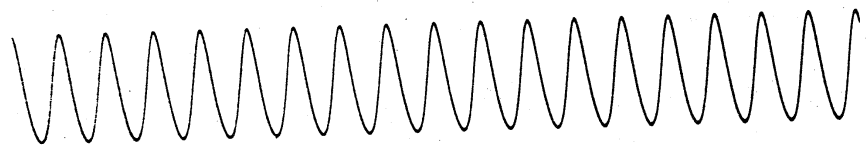
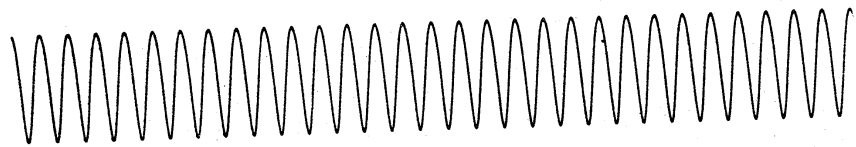
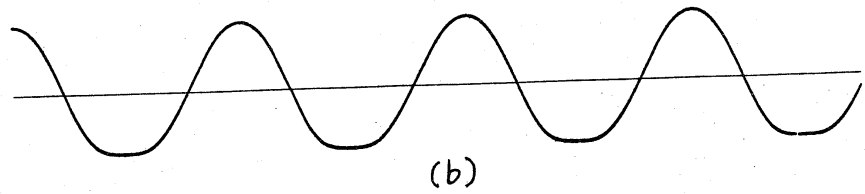
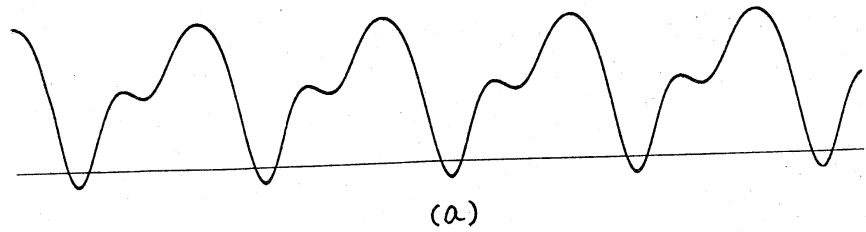
### 3.2 初期値問題

1次ループにおいて、パラメータを  $L = 2.0$  ,  $\delta = 0.8$  とした場合には、系の初期状態により

同期引込状態 :  $\tau \rightarrow \infty$  のとき  $\theta_e(\tau) \rightarrow \theta_e$

非同期平衡状態 :  $\tau \rightarrow \infty$  のとき  $\theta_e(\tau) \rightarrow \theta_a(\tau)$

ここに  $\theta_a(\tau + T) = \theta_a(\tau) + 2\pi$  ,  $(\dot{\theta}_a(\tau))$  の波形は才4図(a)参照)のいずれかが発生する。ここでは、最も簡単な初期条件に対して行なった実験結果を報告する。



(c)

※4図 非同期平衡状態の振動波形  $\frac{d\theta_e}{dt}$

(a) 1次ル-フ°  $L=2.0, \delta=0.8$

(b) 1次ル-フ°  $L=2.0, \delta=0.3$

(c) 2次ル-フ°  $L=1.5, \delta=0.53, \xi=1/\sqrt{2}, \beta=0.1$

i) 初期関数が CONSTANT の場合

$$\theta_I(\tau) = \theta_{I0} \quad (-L \leq \tau \leq 0)$$

$\theta_{I0}$  とそれから到達した定常状態は次の通りである。

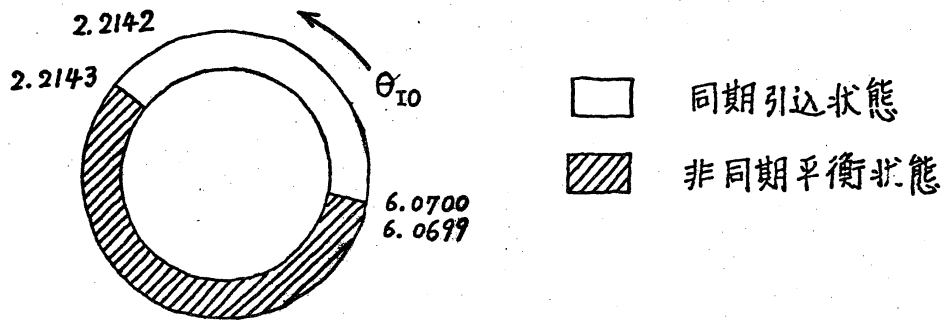


図5 初期値領域  
(初期関数 CONSTANT)

ii) 初期関数が RAMP の場合

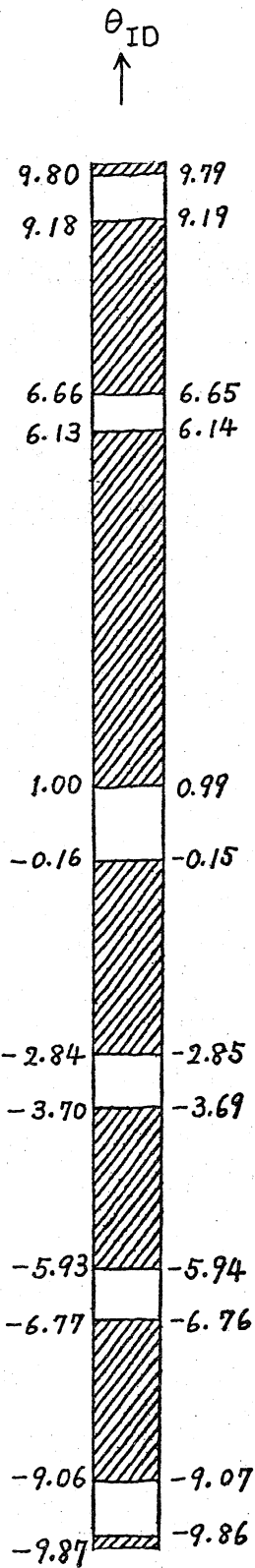
$$\theta_I(\tau) = \theta_{ID}(\tau + L) \quad (-L \leq \tau \leq 0)$$

$$\dot{\theta}_I(\tau) = \dot{\theta}_{ID} \quad (-L \leq \tau < 0)$$

$\theta_{ID}$  とそれから到達した定常状態を図2に示す。  
ただし、実験は  $|\theta_{ID}| \leq 10$  の範囲で行なった。

#### 4. 問題点の整理

- 1) 計算機演算解の精度, 誤差の評価。
- 2) 正弦波以外の位相比較特性, たとえば, 鋸歯状波や三角波特性の位相比較器をもつ位相同期系における諸特性。
- 3) 遅延時間の影響を補償する対策。



□ 同期引込状態  
 ▨ 非同期平衡状態

图 6 初期值領域  
 (初期関数 RAMP)

4) 定常状態の存在, 安定問題, 初期値問題およびこれらの解析法。

注: 1次ループにおける $\omega$  1種および $\omega$  2種周期解の存在は, ごく最近東北大学理学部吉沢太郎教授と, 岩手大学教育学部古用哲夫教授によって証明された。

5) パラメタの変化に伴う定常状態相互間の移行形態, すなわち跳躍現象, 分岐現象。

### 参考文献

- (1) 平出: “遅延時間を含む位相同期系の引込範囲”, 電子通信学会論文誌(B), Vol. 55-B, No. 7, p. 353 (昭和47年7月).
- (2) 大黒: “遅延時間を持つ位相同期回路の引込み特性の解析”, 同上(A), Vol. 57-A, No. 12, p. 872 (昭和49年12月).
- (3) 松尾: “遅延を含む位相同期回路の同期引込範囲”, 同上(B), Vol. 55-B, No. 4, p. 174 (昭和47年4月).
- (4) 宮川: “遅延時間を含むPLLの等価雑音帯域幅”, 同上(B), Vol. 55-B, No. 4, p. 177 (昭和47年4月).
- (5) Z. J. Jelonek and C. I. Cowan: “Synchronized systems with time delay in the loop”, Proc. IEEE 101, IV, p. 388 (1957).
- (6) J. A. Develet: “The influence of time delay on second-order phase-locked loop acquisition range”, Interndt. Telem.

Conf., London, p. 432 (1963).

- (7) R. Leonhardt and H.H. Fleischmann: "Pull-in range of phase-lock circuits with arbitrary feed back filter", Radio Electronic Engr. 36, 2, p.101 (Aug. 1968).