

微分同相写像の attractor について

日大理工 松元重則

本報告の最初の部分は 公理A微分同相写像の
吸引 (attractive) 基本集合に關してあり [1], [2], [3] の
抄録である。 第二部は上田皖亮氏他の所謂不規則遷移
振動についての注意を述べらる。

K は 1 次元 compact branched C^∞ -多様体とし
 $\partial K = \emptyset$ とする。 $g: K \rightarrow K$ が admissible であるとは、
1) g は expanding C^∞ -写像である、 2) $\Omega(g) = K$, 3)
 $K \ni \forall x, \exists I$, nhd of $x \rightarrow g(I)$ は arc であることと
する。 このとき $\Sigma := \lim_{\leftarrow} \{ K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \dots \}$
は (K, g) の solenoid と呼ぶ。 $G: \Sigma \rightarrow \Sigma$, 但し
 $G(x_0, x_1, \dots) = (gx_0, x_0, x_1, \dots)$ は shift map と呼ぶ。
命題 Σ は局所的に Cantor set X 空間である。
 G は同相写像である。

M を n 次元 compact C^∞ -mfd と仮定しとある。
 $f \in M$ の C^r 級公理 A 微分同相写像とする。 ($r \geq 1$)
 また $\Lambda \in \Omega(f)$ の ν と τ の基本集合とある。 Λ が吸引基本集合であるとは $W^u(\Lambda) = \Lambda$ なることとする。 このとき
定理 1 ([1]) 次元吸引基本集合は \mathbb{S}^1 上、solenoid の shift map と位相共役である。

逆に

定理 2 ([2]) solenoid の shift map は \mathbb{S}^1 上、 S^1 の公理 A 微分同相の吸引基本集合と位相共役である。

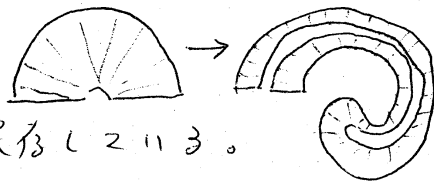
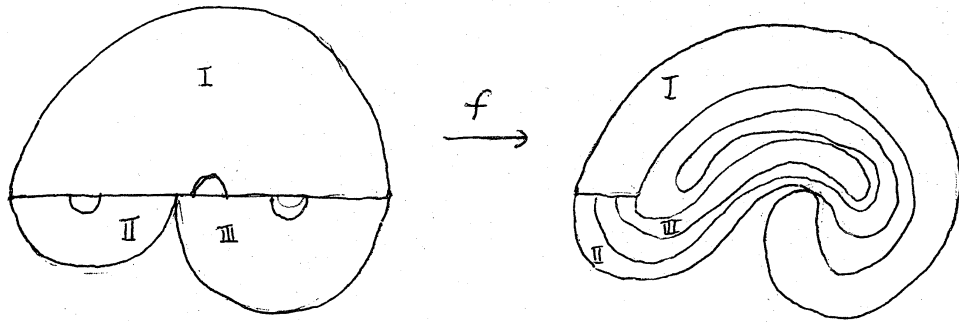
また shift map は次のように分類される。

定理 3 ([2]) $K_1 \xrightarrow{g_1} K_1$ は admissible 写像と (z) の定める shift map $\Sigma_1 \xrightarrow{G_1} \Sigma_1$ とする。 ($i=1,2$)
 このとき G_1 と G_2 が位相共役であるための同値条件は、

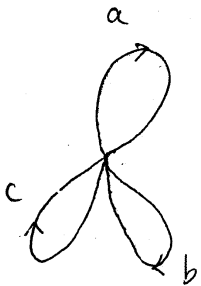
$$\begin{array}{ccc}
 \exists f: K_1 \rightarrow K_2, & \exists f': K_2 \rightarrow K_1, & \exists m \geq 0 \rightarrow \\
 K_1 \xrightarrow{g_1} K_1 & K_1 \xrightarrow{g_1} K_1 & K_1 \xrightarrow{g_1^m} K_1 \\
 \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f \\
 K_2 \xrightarrow{g_2} K_2 & K_2 \xrightarrow{g_2} K_2 & K_2 \xrightarrow{g_2^m} K_2
 \end{array}$$

が \mathbb{S}^1 上可換。

例 ([3])



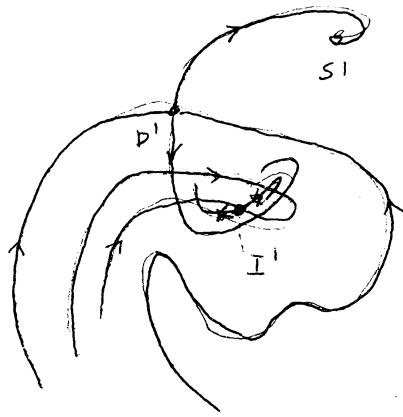
ただし I の領域は精密には
 のように写像され、fiber を保存してゐる。
 また fiber 方向には contractive であり、心棒方向には
 expanding である。領域 II, III についても同様である。
 I, II, III の同心円の中点は、固定点であり、source である。
 無限遠点を source とするにより、これを S^2 の微分同相に拡張する。この微分同相は、
 公理 A をみたし、1次元吸引基本集合をもつ。従つて
 定理 1 により、shift map に対応するが、これは次の様に
 与えられる。(admissible map に対応する。)



$$\begin{aligned}
 a &\longrightarrow a + b + a - b - a \\
 b &\longrightarrow -c + a + b - a + c \\
 c &\longrightarrow -c + a - b - a + c + a + b \\
 &\quad - a + c
 \end{aligned}$$

この例は、かなり複雑であり、やや人工的である。もっと単純な例もあるが、それらに、~~二次元~~ \mathbb{S}^2 上の公理 A 微分同相写像の基本集合として実現することはできない。つまり \mathbb{S}^2 上の吸引基本集合 (一次元) は少なくとし、このくらいは複雑になっってしまうということがある。

次に、上田氏の実験結果に現われた極めて解析の困難な attractor について述べよう。彼は、いくつかの例を提出しており、それらの中には共通のある 複雑な を有している。それらの中で一番単純なものから ~~以下~~ 以下の phase portrait をもつものがある。詳細は [4] を見たい。この例の



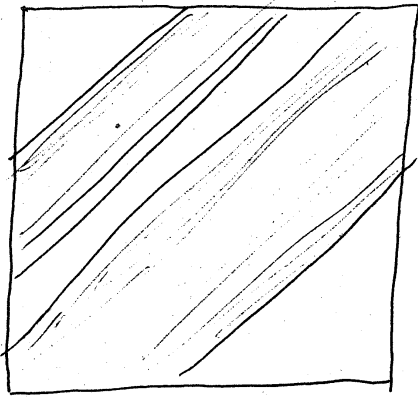
眼目は、一次元 状 の attractor が存在していることである。上田氏の詳細な観察によれば、この微分同相 ~~attractor~~ は、摂動に対し、 Ω -連続ではあるらしいが、

Ω -安定ではなからしむることである。([5])

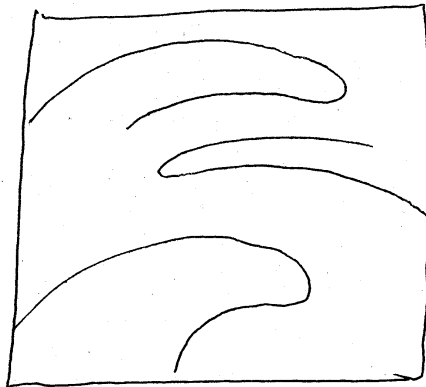
Ω -連続、 Ω -安定の定義は文末に述べたことである。

この attractor は、一見一次元のようにみえるらしいが、

実は、前述の例とは甚だ異なる特徴をもち、これは、
 前述の例では、不安定多様体が左側の二とまごあるの
 に対し、上田氏の例²⁾は右側の二とまごあるものである。



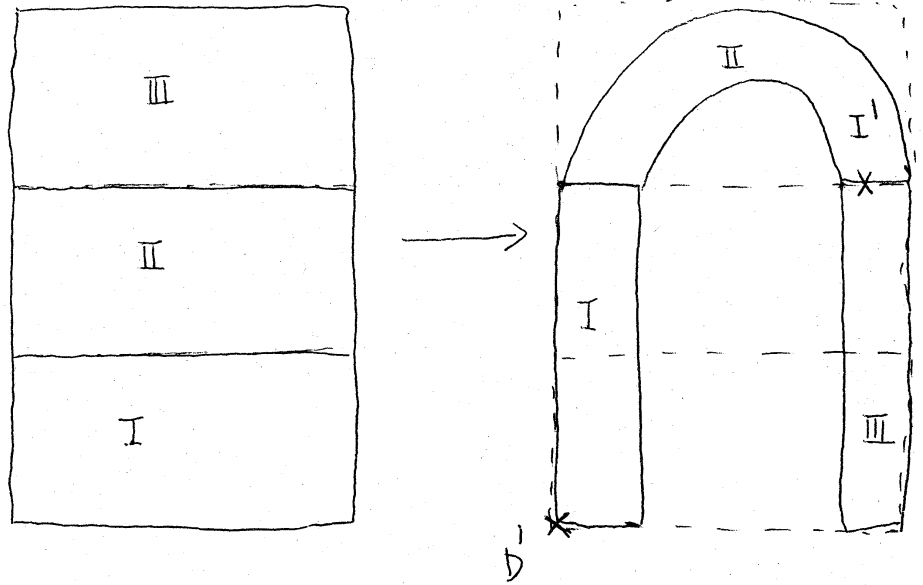
Phykin の例



上田氏の例

つまり上田氏の例では、不安定多様体は無数の「折れ曲り点」
 をもつのである。(従って、 $\epsilon < \delta$ に折れ曲り点、集積点も
 ある。) 他方 Phykin の例の二とまご、公理 A 写像の 1 次元
 attractor は、一般に (局所的には) 近傍へ foliation として
 拡張されるような不安定多様体をもつことを示すこと
 ができるのである。従って上田氏の例は公理 A 写像の 1
 次元 attractor ではない。(恐らく公理 A ではないだろう)

この例と極端に似通った (恐らくは同一の) phase
 portrait をつづいて例を初等的に構成することはできる。



これは上図とよえられる微分同相である。(像の磁石を厚くすると Morse Smale に近づけよう。上の絵のくらの厚さにしておく。) 磁石の厚さを変えると、それに従い phase portrait は少しづつ変化するが、適当な厚さにとると上図の例とよく似たものを得る。また、この図の微分同相写像を經由あるところの 南極北極 と 導子 を結ぶ経路族をつくることができる。私の見るところ、この経路族の研究は、力学系の分岐の研究の中で最重要なもののひとつではないかと思はれる。又、次の予想にはいくつかの根拠がある。(あまり強くはないか)

予想 上に述べた微分同相は無限の sink を持つ。sink とは、巡回集で、1次近似的行列 ~~matrix~~ の固有値が1より小さいもののみとされる。

附録 M を多様体とし、 $\text{Diff}^r(M)$ を M 上の微分同相の集合を表わす。(C^r -topology を使っておく。) $f \in \text{Diff}^r(M)$ が Ω -安定 であるとは f の近傍 \mathcal{N} があり、 \mathcal{N} の各元 g に対し、次の図式が可換となるような同相写像 h が存在する = とする。

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f} & \Omega(f) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g} & \Omega(g) \end{array}$$

また、 f が Ω -連続 であるとは (1) $\Omega(f) \ni \forall x, x \in \mathcal{V}_U$ (近傍) に対し、適当な nbhd \mathcal{N} of f が存在して $\mathcal{N} \ni g$ ならば $\Omega(g) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ (2) $\Omega(f) \subset \mathcal{V}_U$ に対し 適当な nbhd \mathcal{N} of f が存在して $\mathcal{N} \ni g$ ならば $\Omega(g) \subset \mathcal{V}$.

文献表

- [1] R. Williams, "One dimensional attractors," Topology 6.
- [2] ———, "Classification of 1-dim attractors," Proc AMS 14°
- [3] Plykin, "Sources and sinks of A-diffeo of surfaces," Sbornik 93-2
- [4] 上田 et al, "非線型微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動," Trans IEECE 73/4 Vol 56-A No 4.
- [5] 上田 et al "非線型振動からの問題提起2件" This volume