数理解析研究所講究録
第284巻 1976年 48-63

非線形LC回路

徳大 工電子　川上 博

1. はじめに

この報告では非線形LC回路がHamiltonian系となることを示したい。すなわち有限個のインダクタおよびキャパシタからなる任意の回路においては，Kirchhoffの法則による状態変数の拘束の一部が (i) キャパシタ電圧 v_γ 間（あるいはインダクタ電流 i_λ 間）の scleronomic constraints: $f(v_\gamma)=0$（あるいは $f(i_\lambda)=0$）として，また (ii) キャパシタに蓄えられる電荷 q_γ（あるいはインダクタと鎖交する磁束 ϕ_λ）の保存則，すなわち運動の第1積分: $f(q_\gamma)=0$（あるいは $f(\phi_\lambda)=0$）とみなされる結果，回路のダイナミクスはキャパシタに蓄えられる電荷 $q_\gamma \in R^\gamma$ とインダクタの鎖交磁束 $\phi_\lambda \in R^\lambda$ のつくる状態空間 $R^\gamma \times R^\lambda$ 内において，上述の (i) で定まる多様体上の更に (ii) で定まる積分多様体内でHamiltonian系として記述されることとなる。

結果は具体的なcoordinatesを使用して示した。以下この

節では記号の説明，Kirchhoffの法則を記述する際の座標系のとり方などについてよく知られた結果を述べる。記法はR.A. Rohrer [1] 第14章にしたがった。

回路は連結しているものとし，素子の総数（枝の数）を b，グラフとしてみたときの節点の数を n とする。

キャパシタの総数：γ　　　　$b=\gamma+\lambda$

インダクタの総数：λ

枝電流 $i\in R^b$
枝電圧 $v\in R^b$
これらは適当に分割表現して示すことがある：$i=\begin{bmatrix} i_\gamma \\ i_\lambda \end{bmatrix}$，$i_\gamma=\begin{bmatrix} i_c \\ i_s \end{bmatrix}$，$i_c=\begin{bmatrix} i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix}$ など。

(1.1) *Kirchhoff* の法則

$$Qi=0$$

$$Bv=0$$

適当な tree の選択と枝の番号付けを行うと，その tree から決まる座標系で

$$Q=[I \vdots F], \quad B=[-F' \vdots I]$$

の形に表現できる，ここに $'$ は転置を表わす。以下では次の性質を持つ tree を使用する。これはキャパシタ（あるいはインダクタ）のみからなる loop および cutset を数えあげるためである。

(i) C-normal tree：

キャパシタ素子をできるだけ多く tree branches に含む treeのこと。

(ii) L-normal tree:

インダクタ素子をできるだけ多く tree branches に含む treeのこと。

今1つの C-normal tree を選んで固定したとする。このとき次の性質を持つ L-normal tree が存在する:

(性質) C-normal tree における tree inductors および link capacitors をそれぞれ L-normal tree の tree inductors および link capacitors に含む。

そこで C-normal tree, L-normal tree で上の性質を持つ pair を1組選んで，キャパシタ，インダクタを次表のように分割して考える。表中たとえば n_{C1} は C-normal tree の座標系では tree に含まれ，L-normal tree による座標系では link に含まれるキャパシタの個数を表わす。これらの個数はもちろん具体的な tree の選択にはよらない。

C-normal tree	tree blanches		cotree links	
capacitors	n_{C1}	n_{C2}		n_S
inductors		n_T	n_{L1}	n_{L2}
L-normal tree	cotree links	tree blanches		cotree links

これらの trees を用いた Kirchhoff の法則の表現は

(i) C-normal tree を用いて $Q_C i=0$, $B_C v=0$:

tree capacitors	(C_1):	$i_{C1} + F_{C1S}i_S + F_{C1L2}i_{L2} + F_{C1L1}i_{L1} = 0$
	(C_2):	$i_{C2} + F_{C2S}i_S + F_{C2L2}i_{L2} + F_{C2L1}i_{L1} = 0$
tree inductors	(Γ):	$i_\Gamma + F_{\Gamma L2}\, i_{L2} + F_{\Gamma L1}\, i_{L1} = 0$
link capacitors	(S):	$v_S - F'_{C1S}\, v_{C1} - F'_{C2S}\, v_{C2} = 0$
link inductors	(L_2):	$v_{L2} - F'_{C1L2}v_{C1} - F'_{C2L2}v_{C2} - F'_{\Gamma L2}v_\Gamma = 0$
	(L_1):	$v_{L1} - F'_{C1L1}v_{C1} - F'_{C2L1}v_{C2} - F'_{\Gamma L1}v_\Gamma = 0$

(ii) L-normal tree を用いて $Q_L i=0$, $B_L v=0$:

tree inductors	(L_1):	$i_{L1} + N_{L1L2}i_{L2} + N_{L1S}i_S + N_{L1C1}i_{C1} = 0$
	(Γ):	$i_\Gamma + N_{\Gamma L2}\, i_{L2} + N_{\Gamma S}\, i_S + N_{\Gamma C1}\, i_{C1} = 0$
tree capacitors	(C_2):	$i_{C2} + N_{C2S}i_S + N_{C2C1}i_{C1} = 0$
link inductors	(L_2):	$v_{L2} - N'_{L1L2}v_{L1} - N'_{\Gamma L2}v_\Gamma = 0$
link capacitors	(S):	$v_S - N'_{L1S}\, v_{L1} - N'_{\Gamma S}\, v_\Gamma - N'_{C2S}\, v_{C2} = 0$
	(C_1):	$v_{C1} - N'_{L1C1}v_{L1} - N'_{\Gamma C1}v_\Gamma - N'_{C2C1}v_{C2} = 0$

なお行列 Q, B については tree の選び方によらず次の直交性が成りたつことに注意する:

$$Q_C B_L' = 0 \quad , \quad B_C Q_L' = 0$$

これより

$$I - F_{C1L1} N_{L1C1} = 0$$
$$F_{C1L2} - F_{C1L1} N_{L1L2} = 0$$
$$F'_{C2L1} + F'_{C1L1} N'_{C2C1} = 0$$
$$N'_{\Gamma L2} - F'_{\Gamma L2} + N'_{L1L2} F'_{\Gamma L1} = 0$$
$$N_{C2S} - F_{C2S} - N_{C2C1} F_{C1S} = 0$$

などの関係式を得る。

以上の結果をまとめて C-normal tree に基づく Kirchhoff の法則として次の表現を得る:

<u>circuit dynamics</u>:

tree capacitors (C_1): $i_{C1} + F_{C1S} i_S + F_{C1L1}(i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2}) = 0$

link inductors (L_1): $v_{L1} - F'_{\Gamma L1} v_\Gamma - F'_{C1L1}(v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2}) = 0$

<u>first integrals</u>:

tree capacitors (C_2): $i_{C2} + F_{C2S} i_S + N_{C2C1}(i_{C1} + F_{C1S} i_S) = 0$

link inductors (L_2): $v_{L2} - F'_{\Gamma L2} v_\Gamma - N'_{L1L2}(v_{L1} - F'_{\Gamma L1} v_\Gamma) = 0$

<u>holonomic scleronomic constraints</u>

tree inductors (Γ): $i_\Gamma + F_{\Gamma L2} i_{L2} + F_{\Gamma L1} i_{L1} = 0$

link capacitors (S): $v_S - F'_{C1S} v_{C1} - F'_{C2S} v_{C2} = 0$

2. 非線形 LC 回路の回路方程式

(2.1) キャパシタ特性

キャパシタの枝電圧を $v_C=(v_{C1},v_{C2},v_S)\in\mathbb{R}^{n_C}=\mathbb{R}^{n_{C1}}\times\mathbb{R}^{n_{C2}}\times\mathbb{R}^{n_S}$，蓄積される電荷を $q_C=(q_{C1},q_{C2},q_S)\in\mathbb{R}^{n_C}=\mathbb{R}^{n_{C1}}\times\mathbb{R}^{n_{C2}}\times\mathbb{R}^{n_S}$ としたとき，キャパシタ特性 Λ_Q は $(v_C,q_C)\in\mathbb{R}^{n_C}\times\mathbb{R}^{n_C}$ 空間のなめらかな n_C 次元多様体である。通常キャパシタ特性 Λ_Q は v_C，q_C のどちらを用いても global に径数表現できるものと仮定される。したがって diffeomorphisms

$$\begin{aligned}\hat{v}_C:\mathbb{R}^{n_C}&\longrightarrow\mathbb{R}^{n_C}\\ q_C&\longmapsto v_C=\hat{v}_C(q_C)\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\hat{q}_C:\mathbb{R}^{n_C}&\longrightarrow\mathbb{R}^{n_C}\\ v_C&\longmapsto q_C=\hat{q}_C(v_C)\end{aligned}$$

のどちらかでキャパシタ特性をあらわすことにする。前者の表現を電荷制御型，後者のそれを電圧制御型キャパシタと呼ぶ。特に $\hat{q}_C$（あるいは $\hat{v}_C$）の Jacobi 行列 $\frac{\partial\hat{q}_C}{\partial v_C}$（あるいは $\frac{\partial\hat{v}_C}{\partial q_C}$）が各点で対称正値行列となるのが物理的に自然なキャパシタの特性である。

キャパシタを流れる電流 $i_C\in\mathbb{R}^{n_C}$ は蓄積電荷 q_C の時間的変化：

$$i_C=\frac{dq_C}{dt}=\dot{q}_C$$

で定義される。これは Λ_Q の動作点での接ベクトルと考えられる。

(2.2) インダクタ特性

キャパシタと同様なやり方で定義される。インダクタを流れる電流を $i_L=(i_{L1}, i_{L2}, i_\Gamma)\in R^{n_L}=R^{n_{L1}}\times R^{n_{L2}}\times R^{n_\Gamma}$, 鎖交磁束を $\phi_L=(\phi_{L1}, \phi_{L2}, \phi_\Gamma)\in R^{n_L}=R^{n_{L1}}\times R^{n_{L2}}\times R^{n_\Gamma}$ とすると, インダクタ特性 Λ_Φ は $(i_L, \phi_L)\in R^{n_L}\times R^{n_L}$ 空間の n_L 次元多様体である。キャパシタ同様 diffeomorphisms

$$\begin{aligned}\hat{i}_L : R^{n_L} &\longrightarrow R^{n_L}\\ \phi_L &\longmapsto i_L=\hat{i}_L(\phi_L)\end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_L : R^{n_L} &\longrightarrow R^{n_L}\\ i_L &\longmapsto \phi_L=\hat{\phi}_L(i_L)\end{aligned}$$

のいずれかで特性を表わすことにする。通常のインダクタでは $\hat{\phi}_L$ (あるいは $\hat{i}_L$) の Jacobi 行列は対称正値となる。

インダクタ電圧 $v_L\in R^{n_L}$ は鎖交磁束 ϕ_L の時間微分:

$$v_L=\frac{d\phi_L}{dt}=\dot{\phi}_L$$

として定義される。

(2.3) この報告ではキャパシタ特性, インダクタ特性として次の様な簡単な場合を考える。

(i) キャパシタ特性は電荷制御型である:

$$v_{C1}=\hat{v}_{C1}(q_{C1}),\ v_{C2}=\hat{v}_{C2}(q_{C2}),\ v_S=\hat{v}_S(q_S)$$

また $\hat{v}_{C1}:\mathbb{R}^{n_{C1}}\to\mathbb{R}^{n_{C1}}$, $\hat{v}_{C2}:\mathbb{R}^{n_{C2}}\to\mathbb{R}^{n_{C2}}$, $\hat{v}_S:\mathbb{R}^{n_S}\longrightarrow\mathbb{R}^{n_S}$

の各Jacobi 行列は各点で対称正値とする。

(ii) インダクタは磁束制御型である：

$$i_{L1}=\hat{i}_{L1}(\phi_{L1}),\ i_{L2}=\hat{i}_{L2}(\phi_{L2}),\ i_\Gamma=\hat{i}_\Gamma(\phi_\Gamma)$$

また $\hat{i}_{L1}:\mathbb{R}^{n_{L1}}\to\mathbb{R}^{n_{L1}}$, $\hat{i}_{L2}:\mathbb{R}^{n_{L2}}\to\mathbb{R}^{n_{L2}}$, $\hat{i}_\Gamma:\mathbb{R}^{n_\Gamma}\longrightarrow\mathbb{R}^{n_\Gamma}$

の各 Jacobi 行列は各点で対称正値とする。

(注1) キャパシタ，インダクタの特性を上のように使用するtreeに依存する特性と考えるのは自然でないが，ここでは考え方を述べる意味でこのようにした。もっと一般的な特性も同様な扱いが可能である。

(注2) 特性のJacobi行列が対称正値行列となる仮定はキャパシタ，インダクタに蓄えられるエネルギ関数がうまく定義できる条件となる。すなわち次の (2.5)で定義するエネルギ関数が積分路のとり方によらず端点の関数として定まる条件である。

(2.4) 次の状態変数を定義しておく：

$$q_1\triangleq q_{C1}+F_{C1S}\,q_S$$
$$q_2\triangleq q_{C2}+F_{C2S}\,q_S$$
$$\phi_1\triangleq \phi_{L1}-F'_{\Gamma L1}\,\phi_\Gamma$$
$$\phi_2\triangleq \phi_{L2}-F'_{\Gamma L2}\,\phi_\Gamma$$

$$q_0 \triangleq q_2 + N_{C2C1}\, q_1$$
$$\phi_0 \triangleq \phi_2 - N'_{L1L2}\, \phi_1$$

これらの変数を用いてKirchhoffの法則は次のように書きあらためられる。

circuit dynamics:

tree capacitors (C_1): $\dot{q}_1 = -F_{C1L1}(i_{L1} + N_{L1L2}i_{L2})$

link inductors (L_1): $\dot{\phi}_1 = F'_{C1L1}(v_{C1} - N'_{C2C1}v_{C2})$

first integrals:

tree capacitors (C_2): $\dot{q}_0 = \dot{q}_2 + N_{C2C1}\dot{q}_1 = 0$

link inductors (L_2): $\dot{\phi}_0 = \dot{\phi}_2 - N'_{L1L2}\dot{\phi}_1 = 0$

holonomic scleronomic constraints:

tree inductors (Γ): $\hat{i}_\Gamma(\phi_\Gamma) + F_{\Gamma L2}\hat{i}_{L2}(\phi_{L2}) + F_{\Gamma L1}\hat{i}_{L1}(\phi_{L1}) = 0$

link capacitors (S): $\hat{v}_S(q_S) - F'_{C1S}\hat{v}_{C1}(q_{C1}) - F'_{C2S}\hat{v}_{C2}(q_{C2}) = 0$

(2.5) Hamiltonianの計算

キャパシタに蓄えられるエネルギ $W_E(q_C)$ は次のように計算される。

$$W_E : \mathbb{R}^{\gamma} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$q_C \longmapsto W_E(q_C)$$

ここに

$$W_E(q_C) = \int^{q_C} \langle v_C, dq_C \rangle = \int \langle v_{C1}, dq_{C1} \rangle + \langle v_{C2}, dq_{C2} \rangle + \langle v_S, dq_S \rangle$$
$$= \int \langle v_{C1}, dq_1 \rangle + \langle v_{C2}, dq_2 \rangle + \langle v_S - F'_{C1S}v_{C1} - F'_{C2S}v_{C2}, dq_S \rangle$$

$$= \int^{q_1} \langle (v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2}), dq_1 \rangle$$

同様にインダクタに蓄えられるエネルギ $W_M : \mathbb{R}^\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ は

$$W_M(\phi_L) = \int^{\phi_L} \langle i_L, d\phi_L \rangle = \int \langle i_{L1}, d\phi_{L1} \rangle + \langle i_{L2}, d\phi_{L2} \rangle + \langle i_\Gamma, d\phi_\Gamma \rangle$$

$$= \int \langle i_{L1}, d\phi_1 \rangle + \langle i_{L2}, d\phi_2 \rangle + \langle i_\Gamma + F_{\Gamma L2} i_{L2} + F_{\Gamma L1} i_{L1}, d\phi_\Gamma \rangle$$

$$= \int \langle (i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2}), d\phi_1 \rangle$$

したがって回路の全エネルギ $H : \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ を次式で定義しこれをこの回路の Hamiltonian と呼ぶことにする。

$$H(q_C, \phi_L) \triangleq W_E(q_C) + W_M(\phi_L) = H(q_1, \phi_1)$$

$$= \int^{(q_1,\phi_1)} \langle (v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2}), dq_1 \rangle + \langle (i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2}), d\phi_1 \rangle$$

このことから

$$v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2} = H_{q_1}$$

$$i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2} = H_{\phi_1}$$

ただし $H_{q_1} \triangleq D_1 H(q_1, \phi_1) = \dfrac{\partial H}{\partial q_1}$ を表わす。

$$H_{\phi_1} \triangleq D_2 H(q_1, \phi_1) = \frac{\partial H}{\partial \phi_1}$$

(2.6) 回路方程式

まず(2.4)のKirchhoffの法則において tree capacitors (C_1) の個数 n_{C1} と link inductors (L_1) の個数 n_{L1} が等しいことに注意する: $n_{C1} = n_{L1}$

なぜなら Kirchhoffの法則を記述するためのtreeの定め方から明らかなように tree capacitors (C_1) に属するキャパシタのみでcut-setはつくらない; すなわち $\mathrm{rank}\, F_{C1L1} \geqq n_{C1} \Rightarrow n_{L1} \geqq n_{C1}$. 同様に link inductors ($L_1$) に属するインダクタのみでloopをつくることはない; すなわち $\mathrm{rank}\, F'_{C1L1} \geqq n_{L1} \Rightarrow n_{C1} \geqq n_{L1}$. したがって $n_{C1} = n_{L1}$.

(2.4), (2.5) より回路方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -F_{C1L1} \\ F'_{C1L1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{q_1} \\ H_{\phi_1} \end{bmatrix}$$

ただし行列 F_{C1L1} は $n \times n$ ($n = n_{C1} = n_{L1}$) の正則行列である。

(注) Q, B の直交性より $F_{C1L1} N_{L1C1} = I$, F_{C1L1} は正則だから $F_{C1L1}^{-1} = N_{L1C1}$. 今 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ F_{C1L1}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix}$ なる変数変換を施こすと 上で求めた回路方程式は正準形となる:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_u \\ H_v \end{bmatrix}$$

(2.7) Mixed potential による回路方程式の表現

キャパシタ，インダクタの特性がそれぞれ電圧制御型，電流制御型の場合には次のように Mixed potential 関数が定義でき回路方程式を得る。

$\underset{(v_C,\ i_L)}{\mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda}$ 上の 1-form $\zeta = \langle i_\gamma, dv_\gamma \rangle - \langle v_\lambda, di_\lambda \rangle$

を考える。計算すると

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \langle i_\gamma, dv_\gamma \rangle - \langle v_\lambda, di_\lambda \rangle \\
&= \langle (i_{C1} + F_{C1S} i_S), dv_{C1} \rangle + \langle (i_{C2} + F_{C2S} i_S), dv_{C2} \rangle \\
&\quad - \langle (v_{L1} - F'_{\Gamma L1} v_\Gamma), di_{L1} \rangle - \langle (v_{L2} - F'_{\Gamma L2} v_\Gamma), di_{L2} \rangle \\
&= -d\left[\langle F_{C1L1}(i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2}), (v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2}) \rangle \right]
\end{aligned}
$$

そこで混合ポテンシャル関数

$$
\begin{aligned}
P:\ & \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (v_C,\ i_L) \longmapsto P(v_C, i_L)
\end{aligned}
$$

$$
P(v_C, i_L) = \int \zeta = -\langle F_{C1L1}(i_{L1} + N_{L1L2} i_{L2}), (v_{C1} - N'_{C2C1} v_{C2}) \rangle
$$

が定義できる。 他方

$$
i_C + F_{CS} i_S = \frac{d}{dt}\left[\hat{q}_C(v_C) + F_{CS} \hat{q}_S(v_S) \right] = C(v_C) \frac{dv_C}{dt}
$$

$$
v_L - F'_{\Gamma L} v_\Gamma = \frac{d}{dt}\left[\hat{\varphi}_L(i_L) - F'_{\Gamma L} \hat{\varphi}_\Gamma(i_\Gamma) \right] = L(i_L) \frac{di_L}{dt}
$$

ただし

$$
C(v_C) \triangleq \frac{\partial \hat{q}_C}{\partial v_C} + F_{CS} \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial v_S} F'_{CS}
$$

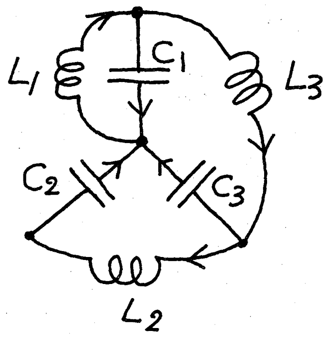
$$
L(i_L) \triangleq \frac{\partial \hat{\varphi}_L}{\partial i_L} + F'_{\Gamma L} \frac{\partial \hat{\varphi}_\Gamma}{\partial i_\Gamma} F_{\Gamma L} .
$$

これらの関係式と混合ポテンシャル関数を用いて，回路方程式は(2.4)より

$$\begin{bmatrix} C(v_C) & 0 \\ 0 & -L(i_L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{v_C} \\ P_{i_L} \end{bmatrix}$$

となる。ここでは回路の才1積分を特に取り出さずに表現した。したがって上の回路方程式の階数は $n_C+n_L = (n_{C1}+n_{C2})+(n_{L1}+n_{L2})$ である。

(2.8) 簡単な例



左図のような簡単な例を考えよう。この場合は拘束条件も才1積分もなく回路方程式はKirchhoffの法則と素子特性からただちに求められる。

C-normal tree によるKirchhoffの法則は

$$i_{C1} - i_{L1} + i_{L3} = 0 \qquad v_{L1} + v_{C1} = 0$$
$$i_{C2} - i_{L2} = 0 \qquad v_{L2} + v_{C2} - v_{C3} = 0$$
$$i_{C3} + i_{L2} - i_{L3} = 0 \qquad v_{L3} - v_{C1} + v_{C3} = 0$$

したがって $F_{C1L1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. またN-normal treeより

$$N_{L1C1} = F_{C1L1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

キャパシタ特性: $v_{C1}=g_1(q_{C1},q_{C2},q_{C3})$, $v_{C2}=g_2(q_{C1},q_{C2},q_{C3})$, $v_{C3}=g_3(q_{C1},q_{C2},q_{C3})$

インダクタ特性: $i_{L1}=f_1(\phi_{L1},\phi_{L2},\phi_{L3})$, $i_{L2}=f_2(\phi_{L1},\phi_{L2},\phi_{L3})$, $i_{L3}=f_3(\phi_{L1},\phi_{L2},\phi_{L3})$

と仮定する(g_i, f_i $i=1,2,3$ の Jacobi 行列は対称正値とする)と

系のエネルギ関数 $H(q_C,\phi_L)$ は

$$H(q_C,\phi_L)=\int_0^{q_C,\phi_L}\langle v_C, dq_C\rangle+\langle i_L, d\phi_L\rangle$$
$$=\int_0^{q_C}\sum_{i=1}^{3} g_i\, dq_{Ci}+\int_0^{\phi_{L3}}\sum_{i=1}^{3} f_i\,\phi_{Li}$$

この積分は上の仮定(Jacobi 行列の対称性)により積分路に依存しない。

回路方程式として

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_{C1}\\ q_{C2}\\ q_{C3}\\ \phi_{L1}\\ \phi_{L2}\\ \phi_{L3}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:ccc} & & & 1 & 0 & -1\\ & 0 & & 0 & 1 & 0\\ & & & 0 & -1 & 1\\ \hdashline -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & & & \end{array}\right]\begin{bmatrix} H_{q_{C1}}\\ H_{q_{C2}}\\ H_{q_{C3}}\\ H_{\phi_{L1}}\\ H_{\phi_{L2}}\\ H_{\phi_{L3}}\end{bmatrix}$$

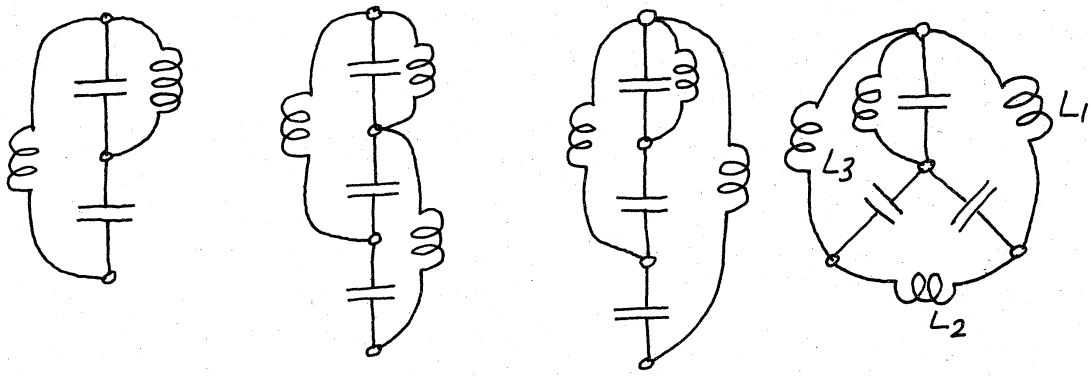
を得る。変数変換 $u=\phi_L$, $v=N_{L1C1}q_C$ により正準形を得る。

次の頁にいくつかの LC 回路の例をあげた。

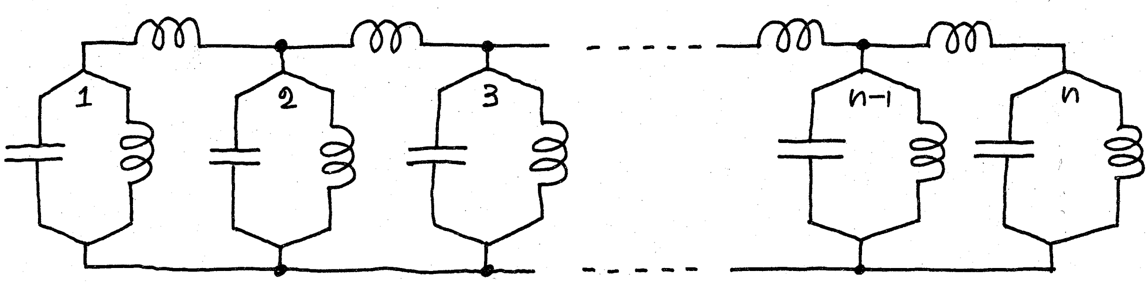
(2)～(4) は上述の例と同様な回路である。

(5) は 1個の第1積分: L_1, L_2, L_3 からなる loop の電圧則が存在する例

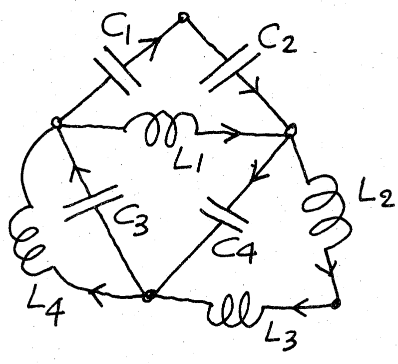
(6) は (5) 同様 (n−1) 個のインダクタの loop があり 回路方程式は 2n 階となる例である。



(2) (3) (4) (5)



(6)



(7)

(7)の例では

第1積分: $\dot{q}_{C1} - \dot{q}_{C2} = 0$

$$\sum_{i=1}^{4} \dot{\phi}_{Li} = 0$$

holonomic constraints:

$$i_{L2} - i_{L3} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} v_{Ci} = 0$$

により回路方程式は4階となる。

3. あすび

非線形LC回路の回路方程式をKirchhoffの法則から直接導出し，それがHamiltonian系となることをみた。LC回路に抵抗素子を加えていわゆる発振器回路を構成し，抵抗素子の項が回路方程式の定式化にどう影響するかを検討することは興味ある問題と思われる。

文献

[1] R. A. Rohrer：回路理論　学献社

[2] C-normal tree，L-normal treeについてはたとえば渡部和：線形回路理論 才1章 昭晃堂 参照。