数理解析研究所講究録
第284巻 1976年 96-112

Differentiable Dynamical Systems on Noncompact Manifolds

京大 理　　　古池時日児

この小論の目的は Axiom A を noncompact manifolds の場合に拡張して, compact manifolds の場合に得られた諸結果を non compact manifolds の場合に述べ直すことである.

M を noncompact で boundary をもたない manifold とし, $f: M \circlearrowleft$ を次の条件をみたす C^r diffeomorphism $(r \geq 1)$ とする.

(m)　M の任意の compact set K に対して, $\overline{O(K)}$ は compact である.

(注)　$O(K) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$.

$\Omega = \Omega(f)$ を f の non wandering set とする. Ω は M の closed set である. (m)-diffeomorphism f に対して, Axiom A を次のように定義する.

Axiom A (a)　Ω は hyperbolic である. すなわち, Ω 上の

continuous vector bundle E^s, E^u が存在して,

(1) $T_\Omega M = E^s \oplus E^u$

(2) E^s, E^u は Tf-invariant である.

(3) 任意の compact invariant set $K \subset \Omega$ に対して,

constants $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ が存在して,

$$v \in E^s_K \Rightarrow \|Tf^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad n = 1, 2 \cdots$$

$$v \in E^u_K \Rightarrow \|Tf^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad n = 1, 2 \cdots$$

ここで, $E^s_K = E^s | K$, $E^u_K = E^u | K$ (E^s, E^u の K の上への制限)とする.

Axiom A (b) $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$

(注) TM 上に Riemann metric $\| \ \|$ が入っているものとする.

M が compact manifold であるときと同様に (m)-diffeomorphism f が Axiom A をみたすとき, 各 $x \in \Omega$ に対して, local stable manifold $W^s_\varepsilon(x)$, local unstable manifold $W^u_\varepsilon(x)$, stable manifold $W^s(x)$, 及び unstable manifold $W^u(x)$ が定まる.

Theorem 1 (Local product structure) (m)-diffeomorphism f が Axiom A をみたすとする. そのとき, 任意の compact set $K \subset \Omega(f)$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると,

$$W^s_\varepsilon(K) \cap W^u_\varepsilon(K) \subset \Omega(f)$$

Proof. M が compact manifold であるときと全く同様に証

明できるので省略する．

次の Theorem は最も基本的である．

Theorem 2.（Spectral decomposition）(m)-diffeomorphism f が Axiom A をみたすとする．そのとき，$\Omega=\Omega(f)$ は次の (1°), (2°) をみたす可算個の部分集合の直和に分解される．

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cdots$$

(1°) Ω_i は compact, invariant かつ transitive である．

(2°) 任意の compact set $K\subset M$ に対して，$\Omega_i\cap K\neq\phi$ となる Ω_i の個数は有限個である．

Proof. 次の2つの Lemma が証明の土台である．

Lemma 1 Theorem 2 と同じ仮定の下で。任意の $x\in\Omega$ に対して，$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば，次のことが成り立つ；$N_x=\bigcup\{W^s_\varepsilon(y_1)\cap W^u_\varepsilon(y_2)\ ;\ y_1\in W^u_\varepsilon(x)\cap\Omega,\ y_2\in W^s_\varepsilon(x)\cap\Omega\}$ とおくとき，

(1) N_x は Ω の open subset である．

(2) N_x の任意の open subset U に対し，$O(U)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}f^n(U)$ は N_x において dense である．

Proof of Lemma 1. (1) は Theorem 1 より明らか．(2) は，Axiom A(b) と Birkoff 's Theorem より容易に証明される．

Lemma 2. X を separable complete metric space とし，$h: X\to X$ を次の (a) をみたす homeomorphism とする．

(a) Xの任意の non empty open set U は dense orbit をもつ. すなわち, $\overline{\mathcal{O}(U)} = X$

このとき, $\{x \in X \ ; \ \overline{\mathcal{O}(x)} = X\}$ は Xにおいて dense である.

Proof of Lemma 2. Z. Nitecki [6] P 196 参照.

さて, Theorem 2 を証明する. 各 $x \in \Omega$ に対して, Lemma 1 のように, N_x を1つきめる. そして $\Omega_x = \overline{\mathcal{O}(N_x)}$ とおく. $\overline{N_x}$が compact であるから, Ω_x も compact である. もちろん. Ω_x は invariant である. 任意の $x, y \in \Omega$ に対して $\Omega_x = \Omega_y$ か, $\Omega_x \cap \Omega_y = \phi$ であることを証明する. 仮に $\Omega_x \cap \Omega_y \neq \phi$ とする. そのとき, ある $n, m \in \mathbb{Z}$ があって $f^n(N_x) \cap f^m(N_y) \neq \phi$ となる. $U = f^n(N_x) \cap f^m(N_y)$ とおくと, Lemma 1 によって, $\overline{\mathcal{O}(U)} \supset N_x$, $\overline{\mathcal{O}(U)} \supset N_y$ これより, $\overline{\mathcal{O}(U)} = \overline{\mathcal{O}(N_x)}$, $\overline{\mathcal{O}(U)} = \overline{\mathcal{O}(N_y)}$ をうる. すなわち, $\Omega_x = \Omega_y$. また, Lemma 2 より Ω_x が transitive であることが分る. また, $\{\Omega_x\}_{x \in \Omega}$ に関して, Theorem の(2°) が成り立つことは明らか. したがってまた $\{\Omega_x\}$ は可算集合である.

Theorem 3. Axiom A をみたす(m) diffeomorphism f の stable manifolds $\{W^s(x) \ ; x \in \Omega\}$ に関して次のことが成り立つ.

(1) $x, y \in \Omega$ に対し, $W^s(x) = W^s(y)$ か $W^s(x) \cap W^s(y) = \phi$

(2) $M = \bigcup_{x \in \Omega} W^s(x)$

Proof. Mが compact manifold であるときと同様である。

Def. $f: M \circlearrowleft$ を Axiom Aをみたす (m)-diffeomorphism とする. $\{\Omega_i\}_{i=1,2\cdots}$ を f の basic sets とする。$\widetilde{W}^s(\Omega_i) = W^s(\Omega_i) - \Omega_i$, $\widetilde{W}^u(\Omega_i) = W^u(\Omega_i) - \Omega_i$ とおく. そのとき, $\Omega_i < \Omega_j$ を $\widetilde{W}^s(\Omega_i) \cap \widetilde{W}^u(\Omega_j) \neq \phi$ で定義する. そして, $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_\ell} < \Omega_{i_1}$ $(1 \leq \ell < \infty)$ となる列 $\{\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_\ell}\}$ を Ω の cycle とよぶ. Ω の cycle がまったく存在しないとき, f は no cycle condition をみたすという.

f が no cycle condition をみたすとき, $\Omega_i \leqq \Omega_j$ を, "$\Omega_i = \Omega_j$ または basic sets $\Omega_{i_1}, \cdots \Omega_{i_n}$ で, $\Omega_i < \Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_n} < \Omega_j$ となるものが存在する" と定義する. そのとき, $(\{\Omega_i\}_{i=1,2\cdots}, \leqq)$ は順序集合になる。つぎのような無限列を ω sequence (あるいは α sequence) とよぶ

$$\Omega_{i_1} > \Omega_{i_2} > \Omega_{i_3} > \cdots\cdots$$

(あるいは, $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \Omega_{i_3} < \cdots\cdots$)

Lemma 3. Ω が no cycle condition をみたし, かつ ω sequence をもたないならば, 任意の basic set Ω_{i_0} に対し, $\Omega_i \leqq \Omega_{i_0}$ となる Ω_i の個数は有限である.

Proof 省略.

Theorem 4 (Filtration) (m)-diffeomorphism $f: M \circlearrowleft$ が Axiom A をみたし，さらに，no cycle condition 及び，no ω-sequence condition をみたすとする．そのとき，f の basic sets に適当に番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ すると，

(☆) $i < j \Rightarrow \Omega_j \leqq \Omega_i$ でない．

とできる．

さらに，かかる番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ に対して，M の open subsets の列 $M_0 = \phi, M_1, M_2, \cdots$ で次の(1)〜(5)をみたすものが作れる．

(1) $\overline{M_i}$ は compact である．

(2) $\overline{M_{i-1}} \subset M_i \qquad i = 1, 2 \cdots$

(3) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$

(4) $f(\overline{M_i}) \subset M_i \qquad i = 1, 2 \cdots$

(5) $\Omega_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \overline{M}_{i-1})$

Proof M が compact manifold であるときと同様である．

Def. (m)-diffeomorphism f が次の条件をみたすとき，f は (m^+)-diffeomorphism であるということにする．

(*) 任意の compact set K に対して 次のような compact set $\widetilde{K}$ が存在する．

(1) $K \subset \widetilde{K}$

(2) $\widetilde{K}$ の任意の open neighborhood U に対して，compact

set K_1 で, $\widetilde{K} \subset \mathrm{int}\, K_1$ かつ $\overline{O^+(K_1)} \subset U$ となるものが存在する. (注) $O^+(K_1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(K_1)$

次の Lemma は容易に証明される. Axiom A をみたす (m)-diffeomorphism のことを単に (Am) diffeomorphism とよぶことにする.

Lemma 4 (Am)-diffeomorphism f が no cycle condition をみたすとき, 次の (I), (II) は同値である.

(I) (m^+)

(II) no ω sequence condition.

Proof 省略

Def M を non compact manifold とする. $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が Ω-stable であるとは, identity map $1_{\Omega(f)} \in C^0(\Omega(f), M)$ の近傍 $\mathcal{W}$ に対して, f の近傍 $\mathcal{N} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ で次の条件をみたすものが存在するときをいう.

(☆) 任意の $g \in \mathcal{N}$ に対して, $\varphi(g) \in \mathrm{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g)) \cap \mathcal{W}$ で, $\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ となるものが存在する.

$$\begin{tikzcd} \Omega(f) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi(g)"] & \Omega(f) \arrow[d, "\varphi(g)"] \\ \Omega(g) \arrow[r, "g"] & \Omega(g) \end{tikzcd}$$

この $\varphi(g)$ を conjugacy とよぶ.

さて, $u \in \mathrm{Diff}(M)$ に対し, $\mathrm{supp}\, u = \overline{\{x \in M \,;\, u(x) \neq x\}}$

とおく．$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$に対し，$\mathrm{supp}\, g^{-1}f$ が compact である $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ 全体を $\sum_f$ で表わす．また，compact set $K \subset M$に対して，$\mathrm{supp}\, g^{-1}f \subset K$ となる $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ 全体を $\sum_f(K)$ で表わす。

さて，(m)-diffeomorphism $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が absolutely Ω-stable とは，任意の compact invariant set $K \subset M$ に対して，fの近傍$\mathcal{N} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ と，$\mathcal{N} \cap \sum_f(K)$ から $C^0(\Omega(f), M)$ への map φ で次の条件をみたすものが存在する；

(1) $g \in \mathcal{N} \cap \sum_f(K)$ に対して，$\varphi(g) \in \mathrm{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g))$ であり，$\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ である．

(2) ある constant C に対して，

$$d(\varphi(g)|\Omega_K, 1_{\Omega_K}) \leq C\, d(f, g)$$

ここで，dは mapping space の metric を表わす．また，$\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \mathrm{int}\, K}$ ．

Theorem 5 (Ω-stability) (Am)-diffeomorphism fが no cycle condition，及び no ω-sequence condition をみたすならば，fは Ω-stable である．

Theorem 6．(m)-diffeomorphism f が，Axiom A (b) をみたし，absolutely Ω stable ならば，fは Axiom A (a) をみたす．

Theorem 7 (m^+)-diffeomorphism f が Axiom A (b)をみたし，absolutely Ω stableならば，fは Axiom A，no cycle condition 及び no ω sequence conditionをみたす．したがって，fはΩ-stable である．

(注) absolutely Ω stableであっても Ω stableとは限らない．

Proof of Theorem 5．証明の土台は Theorem 4 である．M が compact manifoldであるときと同様に証明できるので省略する．

Proof of Theorem 6 次の3つの Proposition を証明すればよい．[2]，[3]．

Prop 1 (m)-diffeomorphism $f: M \circlearrowleft$ が Axiom A (b) をみたし，fのすべての periodic points が hyperbolic のとき，次の条件は同値である．

(I) fは Axiom A (a)をみたす．

(II) 任意の compact invariant set K に対して，$I-f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \longrightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は isomorphism である．

(注) $\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \operatorname{int} K}$，$\Gamma_{\Omega_K}$ は $TM|\Omega_K$ の continuous section の全体，また，$\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}$，$p \in \Omega_K$ に対して，$((I-f^{\#})\gamma)(p) = \gamma(p) - Tf \cdot \gamma \cdot f^{-1}(p)$ とおく．

Prop 2 (m)-diffeomorphism f が absolutely Ω stable

ならば，任意の compact invariant set K に対して，$I-f^{\#}$: $\Gamma_{\Omega_K} \longrightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は injective である．

Prop 3 (m)-diffeomorphism f が absolutely Ω stable ならば，$I-f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \longrightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は surjective である．

Proof of Prop 1. (I)⇒(II) は容易に証明できるので，(II)⇒(I) を証明する．Banach space Γ_{Ω_K} の複素化を $\Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$ で表わす。$I-f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \to \Gamma_{\Omega_K}$ は自然に linear map $I-f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$ に拡張できる．後者も isomorphism であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$\|(I-f^{\#})\gamma\| \geqq 3\varepsilon\|\gamma\| \qquad \text{for all } \gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$$

となる．まず次の事を証明する．

(Claim) ある $\varepsilon' > 0$ が存在して，すべての $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ に対して，$\|(f^{\#}-I)\gamma\| \geqq \varepsilon'\|\gamma\|$ for all $\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}}$

Proof of Claim. まず integer $n > 0$ を $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ととる．$\Lambda_0 = \{$ isolated periodic points in Ω_K with period $\leq 2n+1 \}$ とおき，$\Lambda = \Omega_K - \Lambda_0$ とおく．Λ は closed で，int Λ ("int" は Ω の位相に関して) は Ω_K に属する periodic points with period $\geqq 2n+2$ が dense である．今，$B = \{\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} ; \gamma(x) = 0 \text{ for all } x \in \Lambda_0\}$ とおく。そのとき，

$$\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon\|\gamma\| \qquad \text{for all } \gamma \in B,\ |\lambda| = 1$$ である

ことを証明する。もしそうでないとすると，ある $\gamma \in B$，$\|\gamma\|=1$，$|\lambda|=1$ に対して，$\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| < \varepsilon$ となる．Λ の periodic point p で，period が $2n+2$ 以上で，$\|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$ となるものが存在する．p の近傍 W を $f^k(W) \cap f^l(W) = \phi$ for $-n \leq k < l \leq n$ と選ぶ．continuous function $\bar{\mu}: W \to [0;1]$ を，$\bar{\mu}(p)=1$，∂W の近傍で $\bar{\mu}(x)=0$ となるものとする．そのとき，continuous function $\mu: M \to [0;1]$ を

(1°) $\mu(x)=0$ if $x \notin \bigcup_{i=-n}^{n} f^i(W)$

(2°) $\mu(x) = (1-|i|/n)\,\lambda^i\,\bar{\mu}\circ f^{-i}(x)$ if $x \in f^i(W)$

for some i ; $-n \leq i \leq n$.

とおく．そして，$\eta = \mu\gamma \in B$ とおく．そのとき，

$$\|\eta\| \geqq \|\eta(p)\| = |\mu(p)|\,\|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$$

そして，

$$\begin{aligned}\|f^{\#}(\eta)-\eta\| &= \|(\mu\circ f^{-1})f^{\#}(\gamma) - \mu\gamma\| \\ &= \|(\mu\circ f^{-1})(f^{\#}(\gamma)-\lambda\gamma) + \lambda(\mu\circ f^{-1})\gamma - \mu\gamma\| \\ &\leq \|f^{\#}(\gamma)-\lambda\gamma\| + \|\gamma\|/n \leqq \frac{3}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

$\|\eta\| > \frac{1}{2}$ だから，$\|f^{\#}(\eta)-\eta\| \lneqq 3\varepsilon\|\eta\|$ これは ε に対する仮定に反する．よって，$\gamma \in B$，$|\lambda|=1$ に対して，$\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon\|\gamma\|$ となる．次に $B_0 = \{\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{C}$; $\gamma(x)=0$ for all $x \in \Lambda\}$ とおくと，$\Gamma_{\Omega_K}^{C} = B \oplus B_0$．

Λ_0は有限個のhyperbolic periodic points からなるから，$f^{\#}: B_0 \to B_0$ は hyperbolic である．したがって，$f^{\#}-\lambda I$ $(|\lambda|=1)$は isomorphism である．よって，ある $\varepsilon_1>0$ に対して，$\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon_1\|\gamma\|$ for all $\gamma \in B_0$．そこで $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$ とおくと Claim をうる．（Claimの証明終）．このClaimから $f^{\#}$ の spectrum $\sigma(f^{\#})$ は $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} ; |\lambda|=1\}$ と交わらないことが次のようにして示される；仮に $\sigma(f^{\#}) \cap S^1 \neq \phi$ とすると，$\sigma(f^{\#}) \ni 1$ であるから，$\lambda \in S^1$ で $\sigma(f^{\#})$の境界点であるものが存在する $\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon'\|\gamma\|$ であるから，$(f^{\#}-\lambda I)\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ は $\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ の proper closed subspace である．それゆえ，$\gamma_0 \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ で $(f^{\#}-\lambda I)\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ との距離 δ が >0 であるものが存在する．いま，$Q=\{\gamma \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K} ; \|\gamma\| \leq 2\|\gamma_0\|/\varepsilon'\}$ とおく．そのとき，

(1) もし $|\beta| < \varepsilon'/2$ ならば，

$$\gamma_0 \notin (f^{\#}-(\lambda+\beta)I)(\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K} - Q)$$

(2) もし $|\beta| < \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|$ ならば，

$$\gamma_0 \notin (f^{\#}-(\lambda+\beta)I)Q$$

したがって，$|\beta| < \min(\varepsilon'/2, \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|)$ ならば，$\lambda+\beta \in \sigma(f^{\#})$．これは λ が $\sigma(f^{\#})$の境界点であることに反する．よって，$\sigma(f^{\#}) \cap S^1 = \phi$．すなわち，$f^{\#}$ は hyperbolic であ

る．ここで次のTheoremを必要とする．このTheoremは本質的にはMather[4]によって証明された．

Theorem 8. $\pi: E \to \Lambda$ を compact Hausdorff space Λ 上の finite dimensional vector bundle とし，$L: E \to E$ を bundle map covering a homeomorphism $g: \Lambda \to \Lambda$ とする．$\Gamma(E)$ を E の C^0 sections 全体とする．linear transformation $L^\#: \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を $L^\#(\gamma)(x) = L \circ \gamma \circ f^{-1}(x)$ $\gamma \in \Gamma(E)$, $x \in \Lambda$ で定義する．そのとき，$L^\#$ が hyperbolic ならば，E の subbundle E^s, E^u で次の条件をみたすものが存在する．

(1) $E = E^s \oplus E^u$

(2) E^s, E^u は L-invariant

(3) constants $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ が存在して，

$$v \in E^s \Longrightarrow \| L^n(v) \| \leq C \lambda^n \|v\| \qquad n = 1, 2 \cdots$$

$$v \in E^u \Longrightarrow \| L^{-n}(v) \| \leq C \lambda^n \|v\| \qquad n = 1, 2 \cdots$$

Proof 省略

さて，Prop1の証明を完結させる．$f^\#: \Gamma_{\Omega_K} \to \Gamma_{\Omega_K}$ は hyperbolic であるから，Theorem 8 より，$TM|\Omega_K = E^s_{\Omega_K} \oplus E^u_{\Omega_K}$ と分解される．いま，K' を他の任意の compact invariant set とするとき，$\Omega_K \cap \Omega_{K'}$ において，$E^s_{\Omega_K}, E^u_{\Omega_K}$ と $E^s_{\Omega_{K'}}$, $E^u_{\Omega_{K'}}$ がそれぞれ一致することは，hyperbolic splitting の一意性より容易に分る。そこで $TM|\Omega$ の sub-bundles E^s, E^u を $E^s = \bigcup\{E^s_{\Omega_K}$; K は compact invariant set$\}$, $E^u = \bigcup\{E^u_{\Omega_K}$; K は compact invariant set$\}$ と定義すれば，この E^s, E^u に関して Axiom A (a) が成り立つ．

(Prop 1 の証明終)

Proof of Prop 2. J. Franks [1] より．f の periodic point はすべて hyperbolic であることが分る．いま仮に，ある $\gamma \neq 0 \in \Gamma_{\Omega_K}$ に対して $(I - f^{\#})\gamma = 0$ となったとする．$\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ であり，$\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \mathrm{int}\, K}$ であるから，ある periodic point $p \in \Omega_K$ に対して，$\gamma(p) \neq 0$ となる．前述より，p は hyperbolic periodic point である．Γ_p を $O(p)$ 上の section 全体とする．$f^{\#} : \Gamma_p \longrightarrow \Gamma_p$ は hyperbolic である．ところが $\gamma_0 = \gamma | O(p)$ とすると，仮定より，$(I - f^{\#})\gamma_0 = 0$ ゆえに $\gamma_0 = 0$ これは $\gamma_0(p) = \gamma(p) \neq 0$ に矛盾する．すなわち，$f^{\#} : \Gamma_{\Omega_K} \to \Gamma_{\Omega_K}$ は injective である．

(Prop 2 の証明終)

Proof of Prop 3. $K \subset M$ を任意の compact invariant set とする．$\mathcal{N} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ を f の十分小さい近傍とし，$\varphi : \mathcal{N} \cap \Sigma_f(K) \longrightarrow C^0(\Omega(f), M)$ を absolute Ω stability の定義における conjugacy とする．$g \in \mathcal{N} \cap \Sigma_f(K)$ に対して，TM の C^1 section η で，$\mathrm{supp}\,\eta \subset K$,

$g = \exp\eta \circ f$ となるものがとれる。また，$TM|\Omega_K$ における C^0 section 全体を Γ_{Ω_K} とおくとき，$\xi \in \Gamma_{\Omega_K}$ で，$\varphi(g)|\Omega_K = \exp\xi$ となるものが存在する。$\varphi(g)\circ f = g\circ\varphi(g)$ であるから，Ω_K において，

$$(*)\qquad \exp\xi = \exp\eta \circ f \circ \exp\xi \circ f^{-1}$$

となる。

次の Lemma は容易に証明できる。[5]

Lemma 5. $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ とし，K を f の compact invariant set とする。そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の条件をみたす $\delta > 0$ がとれる；Λ を K に含まれる任意の compact invariant set とし，ξ を $TM|\Lambda$ の C^0 section とする。また η を TM の C^1 section で $\operatorname{supp}\eta \subset K$ となるものとする。そのとき，$\|\xi\|_0 < \delta$，$\|\eta\|_1 < \delta$ ならば，

(1) $\| f\circ\exp\xi\circ f^{-1} - \exp(f^{\#}\xi)\|_0 < \varepsilon\|\xi\|_0$

(2) $\|\exp\eta\circ\exp\xi - \exp(\xi+\eta)\|_0 < \|\eta\|_1\|\xi\|_0 + \varepsilon\|\xi\|_0 + \varepsilon\|\eta\|_0$.

さて，この Lemma を(*)に適用すると，

$$(☆)\qquad \eta = (I - f^{\#})\xi + P(\xi, \eta)$$

ここで，定義域は Ω_K であり，$\|P(\xi,\eta)\| < \varepsilon(\|\xi\|_0 + \|\eta\|_0) + \|\eta\|_1\|\xi\|_0$ である。$(I-f^{\#})\Gamma_{\Omega_K}$ が Γ_{Ω_K} において，dense であることをいえば，Open mapping theorem (Loomis [ ] p17, Lemma 1) より $I-f^{\#}:\Gamma_{\Omega_K}\longrightarrow\Gamma_{\Omega_K}$ が surjective であることが分る. さて, compact invariant set K' を, $K\subset \mathrm{int}\,K'$ ととり, これまで K に対して行なった議論を K' に対して行なう. とくに, 評価式(☆) は K' に対するものとする. いま, $\Gamma^1_{K'}=\{TM$ の C^1 section η で $\mathrm{supp}\,\eta\subset K'$ となるもの全体$\}$ とおく. $R:\Gamma^1_{K'}\longrightarrow\Gamma_{\Omega_K}$ を $R(\eta)=\eta|\Omega_K$ $(\eta\in\Gamma^1_{K'})$ で定義する. R の image は Γ_{Ω_K} において dense である. そこで, Γ_{Ω_K} の任意の open set $\mathcal{U}$ に対して, $\eta\in\Gamma^1_{K'}$ $R(\eta)\in\mathcal{U}$ となるものが存在する. $t>0$ を十分小さくとると, $\xi_t\in\Gamma_{\Omega_{K'}}$ が存在して

$$t\eta=(I-f^{\#})\xi_t+P(\xi_t,t\eta)$$

absolute Ω stability の定義より, $\|\xi_t\|_0<C\|t\eta\|_0$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\|P(\xi_t,t\eta)\|_0 &\le \frac{1}{t}\left(\varepsilon\|\xi_t\|_0+\varepsilon t\|\eta\|_0+\|t\eta\|_1\|\xi_t\|_0\right)\\ &\le \frac{1}{t}\left(\varepsilon tC\|\eta\|_0+\varepsilon t\|\eta\|_0+t^2C\|\eta\|_1\|\eta\|_0\right)\\ &\fallingdotseq \varepsilon C\|\eta\|_0+\varepsilon\|\eta\|_0+tC\|\eta\|_1\|\eta\|_0\end{aligned}$$

それゆえ, $t\to 0$ のとき, $(I-f^{\#})(1/t\ \xi_t')\longrightarrow R(\eta)$

ここで, $\xi_t'=\xi_t|\Omega_K$ とおく. したがって, t が十分小さいとき, $(I-f^{\#})(1/t\ \xi_t')\in\mathcal{U}$, $\|1/t\ \xi_t'\|<C\|\eta\|_0$ をうる. これをもって, Prop 3 の証明は完成する.

Proof of Theorem 7. Theorem 6, [7], Lemma 4 より自明.

References

[1] J. Franks Necessary Conditions for Stability of Diffeomorphisms Trans. Amer. Math. Soc. vol 158 1971 301-308

[2] J. Franks Differentiably Ω-Stable Diffeomorphisms. Topology vol 11 1972 107-113

[3] J. Guckenheimer Absolutely Ω Stable Diffeomorphisms Topology vol 11 1972 159-197

[4] J. Mather Characterization of Anosov Diffeomorphisms Indag Math 30 1968

[5] J. Moser On a Theorem of Anosov. J. Diff. Equations 5 1969 411-440

[6] Z. Nitecki Differentiable Dynamics MIT

[7] J. Palis A Note on Ω-Stability in Global Analysis Pure Symp Pure Math 14

[8] S Smale Differentiable Dynamical Systems Bull Amer Math Soc 73 1967 747-817

[9] S. Smale The Ω Stability Theorem in Global Analysis. Proc. Symp. Pure Math 14

[10] Loomis Abstract Harmonic Analysis