数理解析研究所講究録
第 284 巻 1976 年 113-122

極大な双曲型不変集合について

北大 理学部 倉田雅弘

Mを多様体、 $f: U \longrightarrow M$ をMの開集合から開集合の上への微分同型, $\Lambda \subset U$ を双曲型不変集合とする。ここでは、Λが十分小さな近傍で極大な不変集合であるとき、その構造を調べる。このような双曲型不変集合の例としては、$\Lambda = M$, 即ち f が Anosov 微分同型($cl\, Per(f) = M$を仮定しない)などがある。

始めに 必要な定義を述べる。

定義 $U \subset M$ を多様体Mの開集合、 $f: U \longrightarrow M$を、Mの開集合の上への微分同型とする。f-不変な compact 集合Λが以下を満すとき、双曲型不変集合という。

$T_\Lambda M$ が Tf-不変な subbundle の Whitney 和

$$T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$$

と表わされ、$C>0$, $0<\lambda<1$ が存在して、$n \geqq 0$ に対して、

$$v \in E^s \text{のとき、} \| Tf^n v \| < C\lambda^n \| v \|$$
$$v \in E^u \text{のとき、} \| Tf^{-n} v \| < C\lambda^n \| v \|$$

となる。

<u>定義</u> $\mathcal{A}=\{A_1, \cdots, A_n\}$ を有限集合とする。$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ を、$\mathbb{Z}$ から $\mathcal{A}$ への function 全体の空間に compact-open topology が入っているものとする。ただし、$\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}$ の位相は離散トポロジーとする。写像

$$\rho : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

を、$\rho((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ただし、ここで $b_i = a_{i+1}$ で定義する。$T=(t_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ を $n\times n$ $0-1$ 行列とする。ρ-不変な $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の閉集合 Σ

$$\Sigma = \{ (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid t_{n_i n_{i+1}} = 1, \text{ ただし、} a_i = A_{n_i} \}$$

を (symbol $\mathcal{A}$ 上の行列 T によって決まる) <u>有限型の subshift</u> という。ρ を <u>shift transformation</u> という。ρ は位相同型である。

<u>定義</u> 以下を満すとき、双曲型不変集合 Λ は <u>local</u>

<u>product structure</u> をもつ という。

正数 δ があって、任意の $x \in \Lambda$ に対して、

$$\phi : W^s_\delta(x : \Lambda) \times W^u_\delta(x : \Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、x の Λ での近傍の上への位相同型である。ただし、ここで、$\phi(y, z) = W^u_\delta(y : \Lambda) \cap W^s_\delta(z : \Lambda)$ とする。

<u>定義</u> 次をみたす閉集合 $D \subset W^s_\delta(\Lambda)$ を（$W^s_\delta(\Lambda)$ に対する）<u>proper fundamental domain</u> という。

$$\bigcup_{n \geq 0} f^n(D) \supset W^s_\delta(\Lambda) - \Lambda,$$
$$D \cap \Lambda = \phi.$$

$\delta > 0$, $x \in \Lambda$ に対して

$$W^s_\delta(x : \Lambda) = W^s_\delta(x) \cap \Lambda,$$
$$W^u_\delta(x : \Lambda) = W^s_\delta(x) \cap \Lambda$$

等とおく。

我々は［3］で得た次の結果を用いる。

<u>定理0</u> Λ を双曲型不変集合、U をその近傍とする。このとき、双曲型不変集合 Λ' で、$\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ となるもので、以

下をみたすものがある。

有限型の subshift Σ と、上への写像 $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda'$ があって、$f\pi = \pi\rho$ となる。ただし、ここで ρ は shift transformation である。(π を Σ から Λ' への semi-conjugacy という。)

上の定理から、次を得る。

<u>系</u> Λ を双曲型不変集合で、ある近傍では、極大な不変集合となっているものとする。このとき、有限型の subshift Σ と、semi-conjugacy $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ が存在する。

次に、極大な双曲型不変集合の性質を求める。

<u>補題 1</u> 次の (1), (2), (3) は同値である。

(1). Λ の近傍 U があって、Λ は U での極大な双曲型不変集合である。

(2). Λ は local product structure をもつ。

(3). Λ は proper fundamental domain をもつ。

<u>証明</u> (1) $\Longrightarrow$ (2) を示す。$\delta > 0$ を十分小さく選んで、$2\delta < d(\Lambda, M-U)$, かつ任意の $x, y \in \Lambda$ に対して、$W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(y) = $ 一点 となるようにする。$W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(y) = \{z\} \subset \Lambda$ を示すとよい。$d(f^n(x), f^n(z)) < \delta$

(ただし、$n \geqq 0$)、$n<0$ に対しては、$d(f^n(y), f^n(z))<\delta$ だから、$cl\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(z) \subset U$。 Λ は U で極大な不変集合だから $cl\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(z) \subset \Lambda$。 故に $z\in\Lambda$。

(2) $\Longrightarrow$ (3), (3) $\Longrightarrow$ (1) は [5], [4] を見よ。

補題2　双曲型不変集合 Λ に対して、有限型の subshift Σ と semi-conjugacy $\pi : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ が存在するとする。このとき、有限個の周期点 $x_1, \cdots, x_\ell \in \Lambda$ があって、

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} cl\, W^s(x_i : \Lambda)$$

$$int_\Lambda\, cl\, W^s(x_i : \Lambda) \neq \phi \quad (i=1,\cdots,\ell)$$

となる。ただし、int_Λ は Λ における interior を示す。

証明　$x\in\Lambda$ に対して、$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ を $\pi((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = x$ となるものとする。Σ の symbol の個数を N とすると、任意の整数 m に対して、$n, n+k \in \mathbb{Z}$ があって、

$$a_n = a_{n+k}$$

$$m \leq n < n+k \leq m+N+1$$

となる。

$(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ を

$i \leq n+k$ のとき　$b_i = a_i$

$i \geqq 1,\ \ 0\leq j \leq k-1$ のとき　$b_{n+ik+j} = a_{n+j}$

とおき、$(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma$ を、$i\in\mathbb{Z}$, $0\le j\le k-1$ に対して、$c_{in+j}=a_{n+j}$ となる周期点とすると、$\pi((b_i)_{i\in\mathbb{Z}})\in W^s(\pi(c),\Lambda)$ となる。従って、Λ は周期 $N+1$ 以下の周期点の closure の和にかける。このとき $\mathrm{int}_\Lambda\, cl\, W^s(p:\Lambda)=\phi$ （p は周期 $N+1$ 以下の周期点）は除いてもよい。Q.E.D.

以上の準備のもとに、次を得る。

定理 1　Λ は双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大な不変集合となっているものとする。

(1) Λ の f-不変な閉集合 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ があって、以下をみたす。

(a) $\Lambda=\bigcup_{i=1}^{m} cl\, W^s(\Omega_i:\Lambda)$.

(b) $W^s(\Omega_i:\Lambda)$ は Λ での開集合.

(c) $\Omega_i=W^u(\Omega_i:\Lambda)=cl\,Per(f|\Omega_i)$

(d) $i\neq j$ のとき $W^s(\Omega_i:\Lambda)\cap W^s(\Omega_j:\Lambda)=\phi$.

(2) Λ の f-不変な閉集合 $\Omega'_1,\cdots,\Omega'_m$ があって、以下をみたす。

(a) $\Lambda=\bigcup_{i=1}^{m} cl\, W^u(\Omega'_i:\Lambda)$

(b) $W^u(\Omega'_i:\Lambda)$ は Λ での開集合.

(c) $\Omega'_i=W^s(\Omega'_i:\Lambda)=cl\,Per(f|\Omega'_i)$

(d) $i\neq j$ のとき $W^u(\Omega'_i:\Lambda)\cap W^u(\Omega'_j:\Lambda)=\phi$.

<u>証明</u>　$x_1, \cdots, x_n \in \Lambda$を，補題2で与えられた周期点とする。$x \in W^s(x_i : \Lambda) \cap \mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda)$とすると，十分小さな$\delta > 0$に対して，正の整数$n$があって，

$$d(f^n(x),\ x_i) < \delta,$$

$$\phi : W^u_\delta(f^n(x) : \Lambda) \longrightarrow W^u_{3\delta}(x_i : \Lambda)$$

は，x_iの$W^u_{3\delta}(x_i : \Lambda)$における近傍の上への位相同型となる。ここで，$\phi(y) = W^s_{3\delta}(y : \Lambda) \cap W^u_{3\delta}(x_i : \Lambda)$とする。補題1から，$\phi$はwell definedである。従って，$W^u_\delta(x_i : \Lambda) \subset \mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda)$となるから，$W^u(x_i : \Lambda) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W^u_\delta(x_i : \Lambda) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(\mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda)) = \mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda)$。

もし，$\mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda) \cap \mathrm{int}_\Lambda \mathrm{cl}\, W^s(x_j : \Lambda) \neq \phi$ ならば，$\mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda) = \mathrm{cl}\, W^s(x_j : \Lambda)$となるから，$x_1, \cdots, x_n \in \Lambda$を適当に選びなおすことにより，

$$i \neq j \text{ ならば，} \mathrm{cl}\, W^s(x_i : \Lambda) \cap \mathrm{cl}\, W^s(x_j : \Lambda) = \phi$$

とできる。

$\Omega_i = \mathrm{cl}\, W^u(x_i : \Lambda)$とおく。$\Omega_i$にはhomoclinic pointが稠密にあるから，$\mathrm{cl}\, \mathrm{Per}(f | \Omega_i) = \Omega_i$である。

$W^s(\Omega_i : \Lambda)$はΛでの開集合である。何故なら，任意の$x \in W^s(\Omega_i : \Lambda)$に対して，$x \in W^s(p : \Lambda)$とすると，十分小さな正数$\delta$，$d(f^n(x), f^n(p)) < \frac{\delta}{2}$となる$n \in \mathbb{Z}$に対して，$\phi(y, z) = W^u_{2\delta}(y : \Lambda) \cap W^s_{2\delta}(z : \Lambda)$で定義された写像

$$\phi : W^s_\delta(f^n(p):\Lambda) \times W^u_\delta(f^n(p):\Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、Λにおける$f^n(p)$の近傍で、$f^n(x)$を内部に含むものへの、位相同型となる。

$cl\, W^s(x_i:\Lambda) \supset \Omega_i$だから、$cl\, W^s(x_i:\Lambda) \supset W^s(\Omega_i:\Lambda) \supset W^s(x_i:\Lambda)$となるので、$W^s(\Omega_i:\Lambda) = int_\Lambda\, cl\, W^s(x_i:\Lambda)$。
従って

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{n} cl\, W^s(x_i:\Lambda)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{n} cl\, W^s(\Omega_i:\Lambda)\text{。}$$

故に、(1)を得る。(2)の証明も同様である。

<u>定理2</u>　Λは双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大な不変集合とする。$\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_\ell$を互いに交わらない$f$-不変な閉集合への極小な分解とする。このとき、各$i$($i=1,\cdots,\ell$)に対して、$\Lambda_i$は次のいずれかを満す。

(1) $Per(f|\Lambda_i)$は、Λ_iで稠密である。

(2) $Per(f|\Lambda_i)$は、Λ_iでnowhere denseである。

<u>証明</u>　$\Omega_1,\cdots,\Omega_m$と$\Omega'_1,\cdots,\Omega'_m$を定理1で得られたものとする。$\Lambda_1,\cdots,\Lambda_\ell$を互いに交わらない閉集合で、
$\Lambda_k \cap cl\, W^s(\Omega_j:\Lambda) \neq \phi$ならば、$\Lambda_k \supset cl\, W^s(\Omega_j:\Lambda)$,
$\Lambda_k \cap cl\, W^u(\Omega'_j:\Lambda) \neq \phi$ならば$\Lambda_k \supset cl\, W^u(\Omega'_j:\Lambda)$

となる極小な分解とする。

$\Omega_i \cap W^u(\Omega_j' : \Lambda) \neq \phi$ ならば、$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda) = cl\, W^u(\Omega_j' : \Lambda)$ となって、$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda)$ には、周期点が稠密にある。$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda)$ に周期点が稠密にあって、$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda) \cap cl\, W^s(\Omega_j : \Lambda) \neq \phi$ ならば、$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda)$ にも周期点が稠密にある。従って、$cl\, W^s(\Omega_i : \Lambda)$ を含む Λ_k には 周期点が稠密にある。

$\Omega_i \cap W^u(\Omega_j' : \Lambda) = \phi$ ($j = 1, \cdots, m$) ならば、$\Omega_j \subset \Lambda -$ (稠密な部分集合) となる。Q.E.D.

References

[1] R. Bowen: Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 725-747.

[2] M. W. Hirsh and C. C. Pugh: Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., 14, A.M.S. (1970) 133-165.

[3] M. Kurata: Hartman's theorem for hyperbolic sets, (to appear).

[4] Z. Nitecki: Differentiable dynamics, M. I. T. Press.

[5] R. C. Robinson: Structural Stability of C^1 Diffeomorphisms, (to appear).