数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 1-12

Maximal t-linearly independent set の幾何学的構成法

広島大 理　浜田　昇
福岡教育大　玉利　文和

§1. はじめに

$V(r;s)$ をガロア体 $GF(s)$ (s は素数または素数巾) 上の r 次元ベクトル空間とする. $V(r;s)$ の m 個のベクトル $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \cdots, \underline{a}_m$ からなる集合を S とするとき, S のどの t 個 ($3 \leqq t \leqq r$) のベクトルも $GF(s)$ 上で一次独立であるならば, S を "t-linearly independent set" または "長さ m の $L_t(r,s)$-set" という。$L_t(r,s)$-set のうちで, 長さのもっとも大きいものを "maximal t-linearly independent set" または "maximal $L_t(r,s)$-set" という。以下, maximal $L_t(r,s)$-set の長さを $M_t(r,s)$ で表わす.

Maximal $L_t(r,s)$-set を求める問題は線型符号理論 (情報理論) や線型一部実施要因計画 (実験計画法) に関連する重要な問題 ([2], [3], [9] 参照) であるが, いまだ, 部分

的な結果しか得られていない．

最近，$r \geqq s$ なる整数 r，s に対して，$M_t(t+r, s) = t+r+2$ となるための t に対する必要十分条件を B. R. Gulati 等[4]，[5]が求めた．しかし，この場合の maximal $L_t(t+r,s)$-set を構成する方法は組織的でない．すなわち，$s = 2, 3, 4, 5$ に対する maximal $L_t(t+r, s)$-set が try and error で与えられているだけである．我々は文献[6]において，この場合の maximal $L_t(t+r, s)$-set を組織的に構成する方法を与えた．

今回はこれらの方法を一般化し，任意の整数 $n\,(\geqq 3)$ とある整数 $r = (r_1+1)v_{n-1} - r_0$ ($r_1 \geqq 1$，$n-1 \leqq r_0 \leqq n+s-2$；$v_n = (s^n-1)/(s-1)$) に対して，$M_t(t+r, s) = t+r+n-1$ となるための t に対する必要十分条件とこの場合の maximal $L_t(t+r, s)$-set を構成する幾何学的方法を与える．（詳しくは，文献[7]を参照のこと．）

§2. 予備的結果

$P(n; s)$ を $e_1 = 1$，または，$e_1 = e_2 = \cdots = e_{l-1} = 0$，$e_l = 1$ $(2 \leqq l \leqq n)$ であるような $V(n; s)$ の $v_n = (s^n-1)/(s-1)$ 個のベクトル $\underline{e}$ ($\underline{e}' = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$) からなる集合とする．

以下，$P(n; s)$ のベクトルを有限射影幾何 $PG(n-1, s)$ の

点とみなす．$V(n;s)$のベクトル$\underline{c}$の零でない要素の個数を$\underline{c}$の weight といい，$w(\underline{c})$で表わす．

$P(n;s)$のv_n個のベクトルを weight の順に番号付したものを$C(n;s)$，$H(n;s)$で表わす．すなわち，

$$C(n;s)=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\cdots,\underline{c}_{v_n}\},\quad H(n;s)=\{\underline{h}_1,\underline{h}_2,\cdots,\underline{h}_{v_n}\}$$

を$\alpha_{\ell-1}<j\leqq\alpha_\ell$ ($1\leqq\ell\leqq n$) なる任意の整数jに対して，$w(\underline{c}_j)=w(\underline{h}_j)=\ell$であるような$P(n;s)$の$v_n$個のベクトルからなる集合とする．ここに，$\alpha_0=0$，$\alpha_\ell=\sum_{i=1}^{\ell}\binom{n}{i}(s-1)^{i-1}$ ($\ell=1,2,\cdots,n$) である．特に，$\alpha_n=v_n$である．

$$(2.1)\qquad N_{\alpha_u,\alpha_n}=\|n_{ij}\| : i=1,2,\cdots,\alpha_u,\ j=1,2,\cdots,\alpha_n$$

とおく．ここに，$u=\min\{n,t\}$，

$$n_{ij}=\begin{cases}1, & \underline{c}_i'\underline{h}_j=0\quad(\text{over } GF(s)) \text{ のとき},\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

である．すなわち，N_{α_u,α_n}は$PG(n-1,s)$のα_u個の点$\underline{c}_i$ ($i=1,2,\cdots,\alpha_u$) とα_n個の hyperplane $H_j=\{\underline{c}:\underline{c}'\underline{h}_j=0,\ \underline{c}\in C(n;s)\}$ ($j=1,2,\cdots,\alpha_n$) からなる結合行列である．

与えられた整数r，n，s ($r\geq 0$，$n\geqq 3$) に対して，条件：

$$(2.2)\qquad N_{\alpha_u,\alpha_n}\underline{x}\leqq(r-1)\underline{J}_{\alpha_u}+\underline{w}_{\alpha_u},\quad \sum_{j=1}^{v_n}x_j=r+t$$

を満足する非負の整数 x_j ($j=1,2,\cdots,v_n$) からなるベクトル $\underline{x}'=(x_1,x_2,\cdots,x_{v_n})$ が存在するような正の整数 t の最大値を $T_n(r,s)$ で表わす. ここに, $\underline{J}_m$ はすべての要素が 1 である m 次元列ベクトル, $\underline{w}'_{\alpha_u}=(w(\underline{c}_1), w(\underline{c}_2),\cdots,w(\underline{c}_{\alpha_u}))=(1,1,\cdots,1,2,\cdots,2,\cdots,u,\cdots,u)$ である.

このとき, 次のことが成り立つ. ([6],[7] 参照)

定理 2.1. 与えられた整数 r, n, s に対して,

$$(2.3)\qquad M_t(t+r,s)=t+r+n-1$$

となるための t に対する必要十分条件は, t が $T_n(r,s)<t\leqq T_{n-1}(r,s)$ をみたす整数であることである.

定理 2.2. r, n, s を与えられた整数とし, $\underline{x}'=(x_1,x_2,\cdots,x_{v_n})$ を $T_{n+1}(r,s)<t\leqq T_n(r,s)$ なる整数 t に対して, 条件 (2.2) を満足するベクトルとする. このとき,

$$B'_{t+r,n}=[\underline{J}'_{x_1}\otimes\underline{h}_1, \underline{J}'_{x_2}\otimes\underline{h}_2,\cdots,\underline{J}'_{x_{v_n}}\otimes\underline{h}_{v_n}]$$

とおくと, 行列 $[I_{t+r}:B_{t+r,n}]$ の $t+r+n$ 個の列ベクトルは長さ $t+r+n$ をもつ *maximal* $L_t(t+r,s)$-*set* である. ここに, $A\otimes B$ は行列 A と B のクロネッカー積を表わし, I_m

は $m \times m$ の単位行列を表わす.

これらの定理は $M_t(t+r, s)$ の値や maximal $L_t(t+r, s)$-set を求めるには, $T_n(r, s)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ の値や $T_{n+1}(r, s) < t \leqq T_n(r, s)$ なる整数 t に対して, 条件 (2.2) を満足するベクトル $\underline{x}$ を求めればよいこと, すなわち, (2.2) の最初の不等式をみたすものの中で, Σx_j の値が最大であるような Σx_j の値, および, そのときの (線型計画の) 解 x_j $(j = 1, 2, \cdots, v_n)$ を求めればよいことを示している.

特に, $n = 2$ の場合には, $T_2(r, s) = s(r+1) - 1$ であることが知られている.

§ 3. $T_n(r, s)$ に対する upper bound

$T_n^*(r, s)$ を条件 (3.2) と $\sum_{j=1}^{v_n} x_j = r + t$ を満足する非負の整数 x_j $(j = 1, 2, \cdots, v_n)$ からなるベクトル $\underline{x}$ が存在するような t の最大値とする. 一般に, $T_n^*(r, s) \leqq T_n(r, s)$ であるが, 特に, $T_n(r, s) \geqq n$ ならば, $u = n$ であるから $T_n(r, s) = T_n^*(r, s)$ である. 従って, $T_n^*(r, s) \geqq n$ である場合には, $T_n(r, s)$ を求めるかわりに, $T_n^*(r, s)$ を求めればよい。

以下,

(3.1) $\qquad r = (r_1 + 1) v_{n-1} - r_0,$

$(r_1 \geqq 0,\ 1 \leqq r_0 \leqq v_{n-1})$ とおく。

<u>定理 3.1.</u> $n \geqq 3,\ r_1 \geqq 0,\ n-1 \leqq r_0 \leqq n+s-2$ の場合には,

$$(3.2) \qquad N_{\alpha_n,\alpha_n} \underline{x} \leqq (r-1)\underline{J}_{\alpha_n} + \underline{w}_{\alpha_n}$$

を満足するどんな非負の整数 x_j $(j=1,2,\cdots,v_n)$ からなるベクトル $\underline{x}$ に対しても,

$$(3.3) \qquad \sum_{j=1}^{v_n} x_j \leqq (r_1+1)v_n - \{r_0-(n-1)\}s - r_0 - 1$$

でなければならぬ.

$\sum x_j = t+r,\ r=(r_1+1)v_{n-1}-r_0$ であるから, この定理は

$$(3.4) \qquad T_n^*(r,s) \leqq (r_1+1)s^{n-1} - \{r_0-(n-1)\}s - 1$$

であることを示している. 定理 3.1 を証明するために 3 つの補題を用意する. (補題の証明は [6], [7] 参照)

<u>補題 3.1.</u> $n \geqq 3,\ r_1 \geqq 0,\ n \leqq r_0 \leqq v_{n-1}$ の場合には, 条件 (3.2) を満足するどんなベクトル $\underline{x}$ に対しても,

$$(3.5) \qquad \sum_{j=1}^{v_n} x_j \leqq (r_1+1)v_n - \{r_0-(n-1)\}s - n - 1$$

でなければならぬ．特に，$r_0 = n-1$ の場合には，$\sum x_j \leqq (r_1+1)v_n - n$ である．

<u>補題 3.2.</u>　$n \geqq 4$，$r_1 \geqq 0$，$n \leqq r_0 \leqq n+s-2$ の場合には，条件 (3.2) と次の条件：

$$(3.6) \qquad \sum_{j=1}^{v_n} x_j \geqq (r_1+1)v_n - \{r_0-(n-1)\}s - r_0 - 1$$

を満足するどんな非負の整数 x_j に対しても，

$$(3.7) \qquad x_j \leqq \begin{cases} r_1 & j = 1, 2, \cdots, n \\ r_1+1 & j > n \end{cases}$$

である．

$K = \{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ を $PG(t, s)$ $(t \geqq 2)$ の k 個の点からなる集合，w_j $(j = 1, 2, \cdots, k)$ を $\sum_{j=1}^{k} w_j = k^*$ をみたす正の整数とし，$PG(t, s)$ の i 番目の *hyperplane* H_i $(i = 1, 2, \cdots, v_n)$ に含まれる K の点を $P_{\ell_{ij}}$ $(j = 1, 2, \cdots, \pi_i)$ で表わす．このとき，

$$\min_i \sum_{j=1}^{\pi_i} w_{\ell_{ij}} = m \qquad \left(\!\left(\max_i \sum_{j=1}^{\pi_i} w_{\ell_{ij}} = m \right)\!\right)$$

ならば，K を *weight* $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ をもつ <u>$\{k^*, m; t, s\}$-*min·hyper*</u> ((<u>$\{k^*, m; t, s\}$-*max·hyper*</u>)) という．

ただし，ある i に対して $\pi_i = 0$ ならば，$\min_i \sum_j w_{\ell_{ij}} = 0$ とする．

特に，$t=2$ の場合には，weight $(1, 1, \cdots, 1)$ をもつ $\{k, m; t, s\}$-max·hyper は $\{k; m\}$-arc である．（[1, 6] 参照．）

<u>補題 3.3.</u> $0 \leqq \min_i \{\pi_i\} \leqq s$ の場合には，$PG(t, s)$ のどんな weight をもつ $\{k^*, m; t, s\}$-min·hyper に対しても，$k^* \geqq m(s+1)$ でなければならぬ．

<u>（定理 3.1 の証明）</u> $n = 3$ のときは，[5]，[6] を参照．$r_0 = n-1$ の場合には，補題 3.1 より明らか．従って，$n \geqq 4$，$n \leqq r_0 \leqq n+s-2$ のとき，定理 3.1 が成り立つことを示せばよい．条件 (3.2) を満足するもののうちで，$\sum x_j$ の最大値を

$$\sum_{j=1}^{v_n} x_j = (r_1+1)v_n - \{r_0-(n-1)\}s - r_0 - 1 + \varepsilon$$

$(0 \leqq \varepsilon \leqq r_0 - n)$ とする．補題 3.1 と補題 3.2 より

$$x_j \leqq \begin{cases} r_1, & j = 1, 2, \cdots, n \\ r_1+1, & j > n \end{cases}$$

である．

$$y_j = \begin{cases} r_1 - x_j, & j = 1, 2, \cdots, n \\ r_1+1 - x_j & j > n \end{cases}$$

とおく．$y_j \neq 0$ なる整数 j の全体を $I = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$ で

表わし，$K=\{\underline{h}_{\beta_i} : i=1,2,\cdots,k\}$，$w_i=y_{\beta_i}\ (i=1,2,\cdots,k)$ とおくと，K は weight $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ をもつ $\{\sum_{i=1}^{k} w_i,\ r_0-n+1;\ n-1, s\}$ - min・hyper である．$\sum_{i=1}^{k} w_i=\{nr_1+(v_n-n)(r_1+1)\}-\sum_{j=1}^{v_n} x_j$ $=(r_0-n+1)(s+1)-\varepsilon$ であるから，補題 3.3 より，

$$(r_0-n+1)(s+1)-\varepsilon \geqq (r_0-n+1)(s+1)$$

である．故に，$\varepsilon \leqq 0$ である．一方，$\varepsilon \geqq 0$ より $\varepsilon=0$ である．従って，定理 3.1 が成り立つ．

§4. (3.3) の等号をみたす解 $\{x_j\}$ の構成

E_0 を $PG(n-1,s)$ の $(n-4)$-flat，$\mathcal{P}_\nu(n,s)$ を次の 3 つの条件：

(a) 各 G_i は E_0 を含む．

(b) 各 G_i は weight が n であるような点を少なくとも一つ含む．

(c) $1 \leqq i < j < k \leqq \nu$ なる任意の整数 i, j, k に対して，G_i, G_j, G_k を同時に含む hyperplane は存在しない．

をみたす $PG(n-1,s)$ の ν 個 $(3 \leqq \nu \leqq s-1)$ の $(n-3)$-flat $G_1, G_2, \cdots, G_\nu$ からなる集合とする．特に，$\mathcal{P}_0(n,s)=\phi$，$\mathcal{P}_1(n,s)=\{G_1\}$，$\mathcal{P}_2(n,s)=\{G_1, G_2\}$ とおく．ここに，G_1, G_2 $(G_1 \neq G_2)$ は条件 (a), (b) をみたす $PG(n-1,s)$ の任意の

$(n-3)$-flat で，(-1)-flat は空集合 ϕ を意味する．

補題4.1． $n \geqq 3$ の場合には，$1 \leqq \nu \leqq s-1$ なる任意の整数 ν に対して，前記の条件を満足する $(n-4)$-flat E_0 と ν 個の $(n-3)$-flat $\{G_j\}$ が存在する．

$\mathcal{L}^*_{\nu,m}(n,s)$ $(m=0,1,2)$ を $\mathcal{P}_\nu(n,s)$ の頂度 m 個の $(n-3)$-flat を含むような $PG(n-1,s)$ の hyperplane からなる集合とし，$\mathcal{L}_{\nu,2}(n,s) = \mathcal{L}^*_{\nu,2}(n,s)$，

$$\mathcal{L}_{\nu,1}(n,s) = \mathcal{L}^*_{\nu,1}(n,s) + \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$$

$$\mathcal{L}_{\nu,0}(n,s) = \mathcal{L}^*_{\nu,0}(n,s) - \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$$

とおく．このとき，次の定理が成り立つ．（[7] 参照）

定理4.1． $n \geqq 3$，$r_1 \geqq 1$，$n-1 \leqq r_0 \leqq n+s-2$ なる任意の整数 n，r $(=(r_1+1)v_{n-1} - r_0)$ に対して，

$$(4.1) \qquad x_j = \begin{cases} r_1 - 1, & H_j \in \mathcal{L}_{r_0-n+1,2}(n,s) \text{ のとき}, \\ r_1, & H_j \in \mathcal{L}_{r_0-n+1,1}(n,s) \text{ のとき}, \\ r_1 + 1, & H_j \in \mathcal{L}_{r_0-n+1,0}(n,s) \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおくと，$\underline{x}' = (x_1, x_2, \cdots, x_{v_n})$ は条件 (3.2) と (3.3) の等

号を満足する解である．すなわち，

$$(4.2)\quad T_n(r,s)=T_n^*(r,s)=(r_1+1)s^{n-1}-\varepsilon_1 s-1$$

である．ここに，$\varepsilon_1=r_0-(n-1)$ である．

この定理と定理 2.1，2.2 から，この場合の *maximal t-linearly independent set* を求めることが出来る．

(注) 有限射影幾何 $PG(n-1,s)$ における *spread* を用いると，もっと一般の場合の *maximal t-linearly independent set* を求めることが出来る．(詳しくは，文献[8]参照)

参考文献

1. A. Barlotti, Sui {k;n}-archi di un piano lineare finito, Boll. Un. Mat. Ital. 11 (1956), 553-556.

2. R. C. Bose, Mathematical theory of the symmetrical factorial design, Sankhyā 8 (1947), 107-166.

3. R. C. Bose, On some connections between the design of experiments and information theory, Bull. Inst. Int. Statist. (4) 38 (1961), 257-271.

4. B. R. Gulati, B. M. Johnson and U. Koehn, On maximal t-linearly independent sets, J. Combinatorial Theory (A) 15 (1973), 45-53.

5. B. R. Gulati and E. G. Kounias, Maximal sets of points in finite projective spase, no t-linearly dependent, J. Combinatorial Theory (A) 15 (1973), 54-65.

6. N. Hamada and F. Tamari, Construction of maximal t-linearly independent sets, To appear in "Essays in Probability and Statistics" which is presented in honor of Prof. J. Ogawa on his 60 th birthday (1976).

7. N. Hamada and F. Tamari, On a geometrical method of construction of maximal t-linearly independent sets, Submitted to J. Combinatorial Theory.

8. N. Hamada and F. Tamari, Construction of maximal t-linearly independent sets using spreads in a finite projective geometry, Submitted to Discrete Mathematics.

9. B. Segre, Lectures on Modern Geometry, Cremoness, Rome 1961.