

直交実験の自動計画と Maximal 3, 4-linearly independent set

早大システム研	高橋馨郎
早大 理工	藤原 良
早大 理工	杉本英二
群馬高専	須田健二
東理大 理工	神保雅一

1. 序

工場実験や農事試験などで必要な情報をできるだけ少ない
手間で行うことを目的として、直交表がよく使われている。
直交表を構成すること自体はガロア体上の代数として見事に
体系づけられており、実験の計画はガロア体上の有限射影幾
何の上の点に要因を割りつけることにすぎない。しかし基礎
理論はあっても実際の割りつけは、とくに要因間に交互作用
がある場合は、この理論に十分精通した人でも難しい問題と
なっている。現在では点線図[1][2][3]がよく使われているが、
これも水準数2のときで実験の大きさが32までが限度で、

要因数が多くなると、実際大変な手間がかかるとともに職人的な技術にたよっているのが現状である。

そこで我々は、このような直交実験の計画をコンピュータで自動的に構成するためのアルゴリズムの研究を思い立った。実用的には種々の条件を満足するような実験を計画せねばならないので、ここでは前段階として、線形一部実施要因計画における次の3つの場合について、因子数が与えられたとき実験回数ができるだけ少ない、あるいは実験回数を与えられたとき因子数をできるだけ多くとれる直交実験を構成する問題に取り組んだ。

- (1) 主効果はすべて推定可能
- (2) 主効果はどの2因子交互作用とも交絡しない
- (3) 主効果と2因子交互作用すべてを推定可能

一方、線形一部実施要因計画における直交実験は、ある条件をみたすような行列 G が作れれば、その水準組合せの決定も解析も簡単であることが知られている。すなわち、水準数 n が一定で、しかも素数べきであるなら、ガロア体 $GF(m)$ 上、 $m \times n$ 行列

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (n \leq m)$$

から、直交表 Γ は

$$\Gamma = \{ V = G\theta, \theta \in GF(\mathcal{A})^n \}$$

として得られ、実験回数 N は \mathcal{A}^n となる。このとき上記(1)~(3)の条件は G が次の条件をみたすことに同値である。

- (1) $\forall i, j (i \neq j)$ に対して、 g_i, g_j が $GF(\mathcal{A})$ 上 一次独立
- (2) $\forall i, j, k (i \neq j \neq k)$ に対して、 g_i, g_j, g_k が $GF(\mathcal{A})$ 上 一次独立
- (3) $\forall i, j, k, l (i \neq j \neq k \neq l)$ に対して、 g_i, g_j, g_k, g_l が $GF(\mathcal{A})$ 上 一次独立

そして、上記(1)(2)(3)の特性をもつ行列 G は、次に述べる maximal t -linearly independent set と密接に関連している。

(定義) ガロア体 $GF(\mathcal{A})$ の元を要素にもつ n 次元ベクトル空間を $V(n, \mathcal{A})$ で表わす。 $V(n, \mathcal{A})$ の m 個のベクトル a_1, a_2, \dots, a_m からなる集合を M とする。この M の t 個 ($2 \leq t \leq m$) のベクトルも $GF(\mathcal{A})$ 上で一次独立であるなら、 M は t -linearly independent set であるといい、 M のうち m が最も大きいものを maximal t -linearly independent set $M_t(n, \mathcal{A})$ といい、 m の最大値を $m_t(n, \mathcal{A})$ で表わす。

この maximal t -linearly independent set を用いると、上記(1)~(3)の条件をみたす計画を求める問題はそれぞれ、maximal 2, 3, 4-linearly independent set を求め

ることに帰着される。この問題に対して、現在までに(1)については完全に解決されており、 $M_2(n, \Delta)$ として、 $PG(n-1, \Delta)$ の点全体をとればよいことが知られている。すなわち、

$$m_2(n, \Delta) = \frac{\Delta^n - 1}{\Delta - 1}$$

また(2)(3)の問題についても一部解決されており、代表的には次の結果が得られている[4][5][6]。

$$m_3(n, 2) = 2^{n-1} - 1$$

$$m_3(3, \Delta) = \begin{cases} \Delta + 2 & \dots \dots (\Delta = 2^l) \\ \Delta + 1 & \dots \dots (\Delta = p^l, p \neq 2) \end{cases}$$

$$m_3(4, \Delta) = \Delta^2 + 1 \dots \dots (\Delta = p^l, p \neq 2)$$

$$m_4(4, 2) = 5, \quad m_4(5, 2) = 6, \quad m_4(6, 2) = 8$$

$$m_4(7, 2) = 11, \quad m_4(8, 2) = 17$$

我々は、このような直交実験の計画を自動的に構成するためのアルゴリズムの研究の一環として、上記(2)(3)の(maximal) 3, 4-linearly independent setを求めるアルゴリズムを開発し、コンピュータでサーチし、いくつかの結果を得たので以下に報告する。

2. 3, 4-linearly independent setを求めるアルゴリズム

3, 4-linearly independent setを求めるのに、我々は有限射影幾何的 $PG(n-1, \Delta)$ 方法によった。すなわち、 G の行を

表わすベクトル g_1, \dots, g_m を $PG(n-1, \mathcal{A})$ の点と考えれば、上記条件(2)(3)は次のように表現できる。

(2) $\forall i, j, k (i \neq j \neq k)$ に対して、 g_i, g_j, g_k が $PG(n-1, \mathcal{A})$ の同一直線上にない。

(3) $\forall i, j, k, l (i \neq j \neq k \neq l)$ に対して、 g_i, g_j, g_k, g_l が $PG(n-1, \mathcal{A})$ の同一平面上にない。

このようにして、 $m_3(n, \mathcal{A}), m_4(n, \mathcal{A})$ はそれぞれ $PG(n-1, \mathcal{A})$ の同一直線上にない点の数の最大値、同一平面上にない点の数の最大値を求める問題になる。これらを求めるのに、直線と平面の簡便な計算法が問題となるが、我々は以下に述べる D-table を用いる方法をとった。

2.1 直線の計算アルゴリズム

$PG(n-1, \mathcal{A})$ 上の v 個の点を $GF(\mathcal{A})$ 上の原始既約多項式の根を α として、次のように表現する。

$$\{\alpha^0=1, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{v-1}\}$$

そのべきのみで表わし

$$\{0, 1, 2, \dots, v-1\}$$

とすると、 $PG(n-1, \mathcal{A})$ 上のすべての直線はいくつかの初期直線を $+1 \pmod{v}$ していくことによってサイクリックに表現できる。また差集合の性質から任意の2点 x, y が与えら

れたとき、一意にそれらを含む直線が属する初期直線とサイクルが定まる。そこで、差 $(x-y)$ が $v/2$ より小さいすべての異なる2点について、

D_d^1 ; (x, y) を含む直線の属する初期直線の番号

$D_d^2 = \begin{cases} a_2; & a_1 - a_2 = x - y, a_1, a_2 \text{ は } D_d^1 \text{ 番の初期直線上の点} \\ -1; & D_d^1 \text{ の初期直線が short cycle のとき} \end{cases}$

$d \equiv x - y \pmod{v} \quad 1 \leq d \leq \frac{v}{2}$

$$d \equiv x - y \pmod{v} \quad 1 \leq d \leq \frac{v}{2}$$

$$0 \leq x, y \leq v$$

なる表 (D -table) を作っておく。

いま、 $PG(n-1, v)$ 上の2点 y_1, y_2 が与えられたとき、直線 $\overline{y_1 y_2}$ は D -table を用いて次のように計算できる。

- (1) $v/2$ より小さい方の差を計算する。 $d \equiv y_1 - y_2 \pmod{v}$
- (2) D -table から D_d^1 番の初期直線を求める。 $\{a_1, a_2, \dots, a_{\delta+1}\}$
- (3) y_1, y_2 を含む直線は

$$\{a_1 + r, a_2 + r, \dots, a_{\delta+1} + r\} \pmod{v}$$

$$r \equiv y_2 - D_d^2 \pmod{v}$$

$$\text{但し, } D_d^2 = -1 \text{ のとき, } r \equiv y_2 \pmod{\frac{v}{\delta+1}}$$

2.2 平面の計算アルゴリズム

任意の独立なる点 y_1, y_2, y_3 が与えられたとき、直線の計算アルゴリズムを用いて、直線 $\overline{y_2 y_3}$ を求め、 $\overline{y_2 y_3}$ 上の点と

y_1 とのすべての直線を計算して、平面を計算するアルゴリズムを使用した。

2.3 3, 4-linearly independent set を求めるアルゴリズム

上記直線、平面の計算アルゴリズムを用いて、3-linearly independent set を求めるアルゴリズムは図1のようである。また 4-linearly independent set を求めるアルゴリズムは図1で直線を平面におきかえたものである。

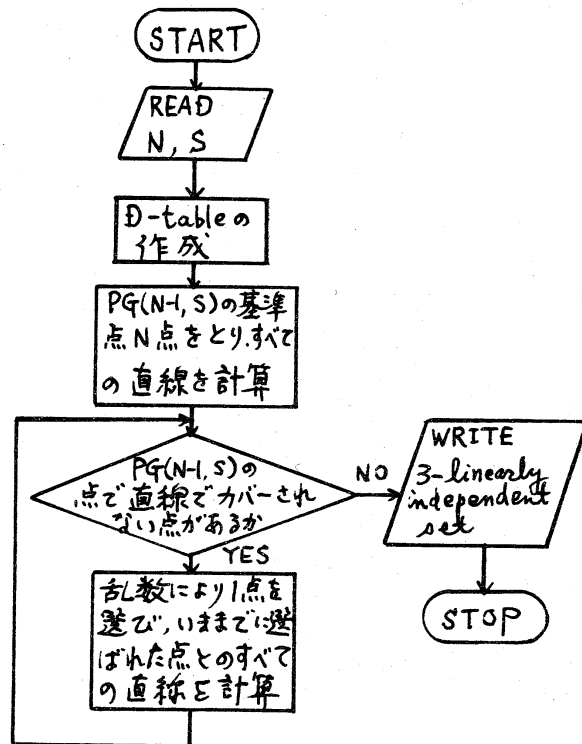


図1. フローチャート

2.4 入れかえアルゴリズム

3-linearly independent set を求めるアルゴリズムにおいて、次の構造を有するパターンがあるとき、点を入れかえることにより 3-linearly independent set の要素数を増加できることがわかったので、図1で 3-linearly independent set を求めたあと、これを追加した。

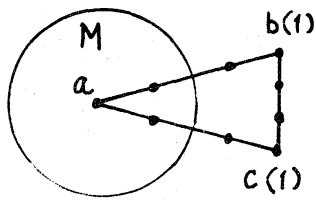


図2. aとb, cの入れかえ可能

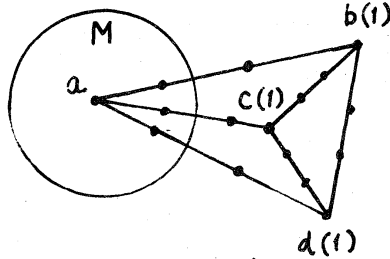


図3. aとb, c, dの入れかえ可能

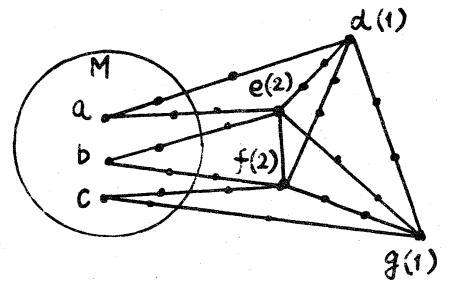


図4. a, b, cとd, e, f, gの入れかえ可能

()内の数字はMの点で生成される直線にカバーされる回数を示す。

3. 結果

得られた結果を表1, 2に示す。

表1. 3-linearly independent set

Δ	n	原始既約多項式	$m_3^{(1)}$	3-linearly independent set ⁽²⁾
3	4	$\alpha^4 = \alpha + 1$	10^*	0, 1, 14, 23, 20, 22, 31, 29, 3, 24
3	5	$\alpha^5 = \alpha + 2$	20	0, 1, 2, 3, 4, 13, 17, 18, 24, 25, 28, 36, 37, 50, 57, 64, 118, 27, 62, 150
3	6	$\alpha^6 = 2\alpha + 1$	56	
3	7	$\alpha^7 = 2\alpha^6 + 2\alpha^4 + 2$	(1;2)	
3	8	$\alpha^8 = 2\alpha^5 + 1$	(224)	
3	9	$\alpha^9 = 2\alpha^7 + 2\alpha^5 + 2$	(448)	
5	4	$\alpha^4 = 4\alpha^3 + 4\alpha + 2$	26^*	46, 47, 2, 3, 8, 12, 14, 22, 26, 28, 38, 55, 82, 112, 68, 126, 56, 0, 41, 42, 66, 70, 85, 102, 111, 124
5	5	$\alpha^5 = 4\alpha^2 + 3$	60	
5	6	$\alpha^6 = 4\alpha^5 + 3$	135	
7	4	$\alpha^4 = 6\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4$	50^*	
7	5	$\alpha^5 = 6\alpha^4 + 3$	(100)	

表2. 4-linearly independent set

Δ	n	原始既約 多項式	$m_4^{(1)}$	4-linearly independent set ⁽²⁾
2	8	$\alpha^8 = \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha + 1$	17*	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 34, 69, 96, 115, 202, 228, 179, 206, 113
2	9	$\alpha^9 = \alpha^5 + 1$	23	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 39, 69, 131, 171, 217, 235, 297, 297, 444, 349, 268, 164, 176
2	10	$\alpha^{10} = \alpha^7 + 1$	30	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 37, 54, 57, 96, 126, 167, 207, 245, 332, 407, 429, 568, 89, 793, 916, 363, 907, 192, 540
2	11	$\alpha^{11} = \alpha^9 + 1$	39	
3	4	$\alpha^4 = \alpha + 1$	5*	0, 1, 2, 3, 31
3	5	$\alpha^5 = \alpha + 2$	11*	0, 1, 2, 3, 4, 54, 43, 96, 61, 114, 13
3	6	$\alpha^6 = 2\alpha + 1$	14	0, 1, 2, 3, 4, 5, 26, 34, 87, 201, 75, 250, 344, 138
3	7	$\alpha^7 = 2\alpha^6 + 2\alpha^4 + 2$	21	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 32, 62, 92, 122, 184, 257, 380, 420, 426, 1034, 702, 199, 108, 178
3	8	$\alpha^8 = 2\alpha^5 + 1$	32	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 38, 57, 92, 103, 105, 125, 136, 153, 161, 162, 232, 236, 249, 386, 443, 444, 957, 1846, 1288, 1663, 2576, 2602, 2090, 3112
3	9	$\alpha^9 = 2\alpha^7 + 2\alpha^5 + 2$	48	
5	4	$\alpha^4 = 4\alpha^3 + 4\alpha + 2$	6*	0, 1, 2, 3, 68, 154
5	5	$\alpha^5 = 4\alpha^2 + 3$	12	0, 1, 2, 3, 4, 37, 51, 82, 148, 283, 478, 508
5	6	$\alpha^6 = 4\alpha^5 + 3$	23	0, 1, 2, 3, 4, 5, 29, 45, 59, 75, 92, 95, 129, 224, 338, 508, 775, 1615, 2962, 2399, 2337, 226, 2128
7	4	$\alpha^4 = 6\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4$	8*	0, 1, 2, 3, 47, 109, 386, 379
7	5	$\alpha^5 = 6\alpha^4 + 3$	16	0, 1, 2, 3, 4, 19, 42, 70, 113, 235, 269, 347, 469, 1244, 1732, 1407

(注) (1) 表中の 3, 4-linearly independent set の要素数

(2) $PG(n-1, s)$ の点のベキ表示

* maximal が保障されている。

() 内は少なくとも二以上あることがわっている数値

4. $M_{3,4}(n, s)$ とデザイン

得られたいくつかの $M_{3,4}(n, s)$ とデザインとの関係が明らかになったので以下に報告する。

- (1) $PG(3, s)$ における $M_3(4, s)$ は *non-degenerate quadric* から $m_3(4, s) = s^2 + 1$ が知られているが [4], この $M_3(4, s)$ と $PG(3, s)$ の超平面との共通集合のうち、*cardinality* が $s+1$ のものをとると 3-design $(s^2+1, s+1, 1)$ をなす [9]。
- (2) $PG(5, 3)$ における 3-linearly independent set として要素数 56 個 (たぶん maximal であると思う) 求めたが、この set と $PG(5, 3)$ の 2-flat との共通集合のうち、*cardinality* が 4 のものをとると、BIBD $(56, 4620, 330, 4, 8)$ をなす。
- (3) $PG(4, 3)$ における $M_4(5, 3)$ は $m_4(5, 3) = 11$ 個求めたが、この $M_4(5, 3)$ と $PG(4, 3)$ の超平面との共通集合のうち、*cardinality* が 5 のものをとると、4-design $(11, 5, 1)$ をなす。

参考文献

- [1] 増山元三郎；実験計画法 才2版，岩波全書 (1972)
- [2] 田口玄一；実験計画法 上下，丸善 (1962)
- [3] 奥野芳賀；実験計画法，培風館 (1969)
- [4] R.C. Bose；Mathematical theory of the symmetrical factorial design, *Sankhyā*, vol. 8 (1947)
- [5] E. Seiden；On the problem of construction and uniqueness of saturated 2_R^{R-p} designs, *Inst. Statist. mimeo. Series 600.19*, Chapel Hill, N.C. (1969)
- [6] B. Segre；Introduction to Galois geometries, *Mem. Accad. Naz. Lincei Ser. 8* (1967)
- [7] 福田悌次郎；線形符号の最大符号長について，京大数理解析研究所講究録 95 (1970)
- [8] 高橋磐郎；組合せ数学を用いた実験計画の自動計画アルゴリズム開発計画について，早大システム科学研究所所報 (1975)
- [9] 藤原，須田；射影幾何上の quadric と 3-design，京大数理解析研究所共同研究集会「デザインの構成法および不存性」予稿集 (1976)