数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 24-30

射影幾何上の QUADRIC と 3-DESIGN

早大 理工　藤原 良
群馬高専　須田 健二

1. 序論

$PG(n, s)$，s は奇素数の巾，上で次のように 2 次形式を 0 としたときの解の集合を <u>QUADRIC</u> Q_n という．

$$Q_n = \{ \boldsymbol{x} \,;\ \boldsymbol{x}' \mathbf{A} \boldsymbol{x} = 0 \}$$

$\boldsymbol{x}$ は $PG(n, s)$ 上の点のベクトル表現，
$\mathbf{A}$ は $GF(s)$ 上の $(n+1)\times(n+1)$ 行列．

もし，$\mathbf{A}$ に両辺から正則な行列をかけることによって，正則な対角行列に変換できるなら，

$$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{n+1} \end{bmatrix}$$

Q_n を <u>NON-DEGENERATE</u> QUADRIC と呼ぶ．そうでないとき <u>DEGENERATE</u> QUADRIC という。

任意の $P \in Q_n$ に対して，<u>TANGENT SPACE</u> を次のように定義する．

$$\pi(P) = \{\, x \;;\; x'(A+A')P=0 \;,\; x \in PG(n,s) \,\}$$

Q_n が NON-DEGENERAT のとき TANGENT SPACE は $PG(n,S)$ 上の $(n-1)$-flat となる．

$PG(2k-1, S)$ 上の NON-DEGENERAT QUADRIC が $(k-1)$-flat を含み，それ以上の次元の flat を含まないとき，それを <u>HYPERBOLIC</u> (RULED) QUADRIC と呼ぶ。又 $(k-2)$-flat を含み，それ以上の flat を含まないとき <u>ELIPTIC</u> (NON-RULED) という．

NON-DEGENERAT QUADRIC に含まれる P-flat の数は次のような式で表わせる [1]．

$PG(2k, s)$ 上の QUADRIC では

$$\prod_{r=0}^{P} \frac{(s^{2(k-P+r)}-1)}{(s^{P+1-r}-1)} \quad , \quad P \leq k-1$$

$PG(2k-1, s)$ 上の ELIPTIC では

$$\prod_{r=0}^{P} \frac{(s^{2k-1-2P+2r}+s^{k-P+r-1}-s^{k-P+r}-1)}{(s^{P+1-r}-1)} \quad , \quad P \leq k-2$$

$PG(2k-1, s)$ 上の HYPERBOLIC では

$$\prod_{r=0}^{P} \frac{(s^{2k-1-2P+2r}-s^{k-P+r-1}+s^{k-P+r}-1)}{(s^{P+1-r}-1)} \quad , \quad P \leq k-1$$

2. 定理

Q_n のどの3点も $PG(n, s)$ 上の同一直線上にない，ことと任意の $P \in Q_n$ に対して $\pi(P) \cap Q_n = \{P\}$ であることは同値である。

証明

Q_n のどの3点も同一直線上にないとすると，Q_n 上の任意の2点 P_0, P_1 に対して，

$\overline{P_0P_1}$ 上の他の点を

$$P_\lambda = P_0 + \lambda P_1 \quad , \quad \lambda \neq 0$$

とすると，P_λ は Q_n 上にはないので

$$P_\lambda' A P_\lambda = P_0' A P_0 + \lambda(P_0'(A+A')P_1) + \lambda^2 P_1' A P_1 \neq 0$$

である。

$$P_0 A P_0 = P_1 A P_1 = 0$$

であるので

$$P_0'(A+A')P_1 \neq 0$$

となり，$P_0 \notin \pi(P_1)$ である。すなわち2つ以上の Q_n の点が同一の TANGENT SPACE に含まれることはない。

逆に，任意の $P_0 \in Q_n$ に対して $\pi(P_0) \cap Q_n = \{P_0\}$ であるとすると，どの $P_1 \in Q_n$，$P_1 \neq P_0$ に対しても，

$$P_1(A+A')P_0 \neq 0$$

であるので，$\overline{P_0P_1}$ 上の他の点を $P_\lambda = P_0 + \lambda P_1$，$\lambda \neq 0$ と

すると

$$P_\lambda' A P_\lambda \neq 0$$

となる。ゆえに Q_n 上のどの3点も同一直線上にはない。□

3. 定理

Q_n を $PG(n, s)$ 上の NON-DEGENERATE QUADRIC とすると、任意の $P \in Q_n$ に対し、$\pi(P)$ に含まれないで、P を通る $PG(n, s)$ 上の他の全ての直線上には、P 以外に必ず1つ Q_n と共有する点がある。

証明

$\pi(P)$ 上にない1つの点を P_1 とする。$\overline{PP_1}$ 上の P 以外の点を

$$P_\lambda = P_1 + \lambda P$$

と表わすと

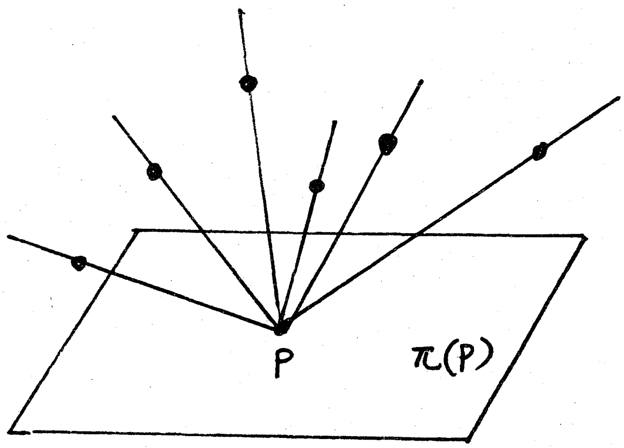
$$\begin{aligned} P_\lambda' A P_\lambda &= P_1' A P_1 + \lambda P_1'(A+A')P + \lambda^2 P' A P \\ &= P_1' A P_1 + \lambda P_1'(A+A')P \end{aligned}$$

このとき、$P_1'(A+A')P \neq 0$ であるので $P_\lambda' A P_\lambda = 0$ となるような λ が唯一1つ存在する。

$$\lambda = P_1' A P_1 (P_1'(A+A')P)^{-1}$$

ゆえに $\overline{PP_1}$ 上には P 以外に、必ず1つ Q_n と共有する点 P_λ

が存在する。 □



3.1 系

PG(3, S) 上の ELIPTIC QUADRIC E_3 では TANGENT SPACE 以外の全ての平面には，必ず S+1 個の E_3 と共有する点が存在する。

証明

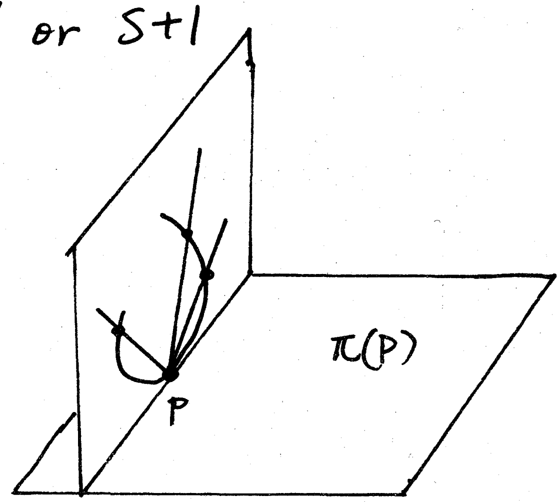
H を PG(3, S) 上の平面とすると，$E_3 \cap H \neq \phi$ なる

そのとき，系3.1より

$$|E_3 \cap H| = 1 \text{ or } S+1$$

である．

なぜなら，PG(3, S) 上の ELIPTIC QUADRIC は 2定理の E_3 のどの3点も同一直線上にない性質を満たす[2] ので $E_3 \cap \pi(P) = \{P\}$



である． そこで，TANGENT SPACE となる平面の数は

E_3 の点の数に等しいから

$$s^2+1$$

である．$|E_3 \cap H| = s+1$ となる平面の数は

$$\binom{s^2+1}{3} \Big/ \binom{s+1}{3} = s^3+s$$

である．この2種類の平面で s^3+s^2+s+1 枚ある．この数は PG(3, s) 上の全ての平面の数に等しいので，この2種の平面で全てである。 □

3.2 系．

PG(3, s) 上の ELIPTIC QUADRIC E_3 で，TANGENT SPACE 以外の平面を H とすると，$H \cap E_3$ を1つの Block とする $3-(s^2+1, s+1, 1)$ DESIGN を作る．

証明．

系3.1 より，$|H \cap E_3| = s+1$ であるので，BLOCK SIZE は一定である．そして，E_3 上の任意の3点を仮定するとそれらの点が張る平面が1つ定まる．そしてその上には必ず E_3 と共有する $s+1$ 個の点が存在する．ゆえに

$$v = |E_3| = s^2+1$$

$$k = |E_3 \cap H| = s+1$$

$$b = (s^3+s^2+s+1) - (s^2+1) = s^3+s$$

なる STEINER 3-DESIGN が構成される．

4. むすび

PG(n, s)上のQuadricは3-Lineary Independent Set (k-ARCともいう，kはその集合の濃度)，つまり，どの3点も同一直線上にない点の集合と密接な関係があると思われる。たとえば，PG(4,3) 上のNon-Degenerat Quadricは40点，40直線からなっており，そのどの点でも4直線が交わった構造をもっている．この40点の中から半分の20点を適当な方法で選んで20-ARCを作ることができる。又，PG(5,3)上のElliptic Quadricは112点，280直線からなっている，そして，そのどの点も10直線が交わった構造をもつ。この112点の内から半分の56点を選んで，56-ARCを作ることができるだろう．そして．その56点の任意の点に関するTangent Spaceには，選ばれた点の内の11点が含まれており，その11点は，おそらく4-Independent Setとなっていると思われる．

5. 参考文献

[1] Ray-Chaudhuri, D.K. Some Results on Quarics in Finite Projective Geometry based on Galois Field, Cana. J. of Math. Vol. 14 (1962)

[2] Bose, R.C. Mathmatical Theory of the Symmetrical Factorial Design SANKHYA 8 (1947)