数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 38-48

あるPBIB designの特徴づけ

広島大 教育 景山三平
〃 理 辻 卓見

§0. 序

PBIB designにおいてよく知られている不等式 $b \geqq v - \alpha_0$。(α_0: NN'の零固有根の重複度. N: 結合行列) 及び, μ-resolvable PBIB designにおける不等式 $b \geqq v + t - 1 - \alpha_0$ の等号が成立するときの条件をNN'のスペクトル分解を用いて特徴づける。さらに いろいろなPBIB designのブロック構造をブロックとassociation scheme との関連において特徴づける。なお, PBIB design のNN'のスペクトル分解については石井 [2] を参照。

§1. ブロックデザインの不等式

<u>1.1</u>. パラメーター v, b, r, k ($v > k$) の block design の結合行列をNとすれば, NN'は半正値対称で非負行列とな

り，$E_{v\times 1}$（$E_{a\times b}$：$a\times b$ 行列ですべての要素が 1，特に $E_{a\times a}=G_a$ とかく）を固有根 rk に対応する固有ベクトルにもつ。したがって

$$NN'=rk\frac{1}{v}G_v+\sum_{i=1}^{l}\rho_i P_i+0P_0 \qquad (1.1)$$

とスペクトル分解できる（ここで，$\rho_i\neq\rho_j$, $i\neq j$, $rk\geq\rho_i>0$, l：適当な正整数，P_0 は零行列の時もある）。 本稿での design はすべて連結とする（したがって $rk>\rho_i$, $i=1,2,\cdots,l$）。

$\alpha_i=\mathrm{rank}\,P_i$, $i=0,1,\cdots,l$ とおけば，NN' と $N'N$ の 0 でない固有根は重複度まで含めて一致すること，及び $E_{b\times 1}$ は rk を固有根とする $N'N$ の固有ベクトルであるから

$$N'N=rk\frac{1}{b}G_b+\sum_{i=1}^{l}\rho_i Q_i+0Q_0 \qquad (1.2)$$

とスペクトル分解でき，$\mathrm{rank}\,Q_i=\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,l$ となる。したがって，不等式

$$b\geq v-\alpha_0 \qquad (1.3)$$

が成立する。 さらに等号が成立するときは

$$\frac{1}{b}G_b+\sum_{i=1}^{l}Q_i=I_b\ \left(\text{又は}\sum_{i=1}^{l}Q_i=I_b-\frac{1}{b}G_b\right) \qquad (1.4)$$

である。 特に $l=1$ の時 次をえる。

［定理 1.1］ パラメーター v,b,r,k の block design において，任意の二つのブロックの共有数が一定のための必要十分条件は，$l=1$ でかつ $b=v-\alpha_0$ である。

証明 （必要） ブロック共有数が等しいとき N' は BIB

designであるから，よく知られた関係式 $\theta=\frac{k(r-1)}{b-1}$ （θ：ブロック共有数）から

$$N'N=N'(N')'=(k-\theta)I_b+\theta G_b=rk\tfrac{1}{b}G_b+(k-\theta)(I_b-\tfrac{1}{b}G_b)$$

とスペクトル分解できる。よって $l=1$ となり，また

$$rank(\tfrac{1}{b}G_b)+rank(I_b-\tfrac{1}{b}G_b)=b$$

より $b=v-\alpha_0$ をえる。

（十分） $b=v-\alpha_0$ と $l=1$ より（1.4）が成立して $Q_1=I_b-\frac{1}{b}G_b$ となる。したがって

$$N'N=rk\tfrac{1}{b}G_b+\rho_1(I_b-\tfrac{1}{b}G_b)$$

となり，これはブロック共有数が等しい事を意味する。

（証明おわり）

注1） 定理 1.1 は本質的には Shah [4] によって得られたものと一致する。

注2） $\theta=\frac{k(r-1)}{b-1}$ は整数でなければならない。

注3） N が BIB design の時，定理 1.1 は symmetric BIB design （$v=b$）のよく知られた特徴づけを示している。

定理 1.1 はいろいろな PBIB design に適用できるが，ここでは一つだけ挙げる。

［系］ 2-associate triangular PBIB design （$v=\frac{n(n-1)}{2}$, $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$）において $r-2\lambda_1+\lambda_2=0$ の時，任意の二つのブロックの共有数が一定であるための必要十分条件は，

$b=n$ で $k(r-1)/(n-1)$ が整数 となることである。

<u>1.2</u> パラメーター $v, b=\beta t, r=\mu t, k,$ の μ-resolvable design は結合行列 N に対して

$$N(I_t \otimes G_\beta) = \mu E_{v\times b} \qquad (1.5)$$

で特徴づけられる。 $\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta$ は projection であり (1.5) より

$N'N(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta) = \frac{rk}{b} G_b$。 この式と (1.2) より

$N'N(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b) = 0$ をえる。 したがって

$$Q_0(\tfrac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \tfrac{1}{b} G_b) = \tfrac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \tfrac{1}{b} G_b$$

となる。 ここで $\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b$ は projection で

$\mathrm{rank}(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b) = t-1$ より不等式

$$b \geqq v + t - 1 - d_0 \qquad (1.6)$$

が成立する。 さらに等号が成立するときは

$$Q_0 = \tfrac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \tfrac{1}{b} G_b \qquad (1.7)$$

である。 特に $l=1$ の時 次をえる。

［定理1.2］ μ-resolvable block design が affine μ-resolvable (パラメーター $q_1 = (\mu-1)k/(\beta-1)$, $q_2 = k^2/v$) であるための必要十分条件は $l=1$ かつ $b = v+t-1-d_0$ である。

<u>証明</u> (必要) $N'N = I_t \otimes \{(k-q_1) I_\beta + (q_1 - q_2) G_\beta\} + q_2 G_b$

$= rk\frac{1}{b} G_b + (k-q_1)(I_b - \frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta) + 0(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b)$

とスペクトル分解できるから必要性は明らかである。

（十分）　$b=v+t-1-\alpha_0$ より（1.7）が成立し $l=I$ より（1.2）は $N'N=rk\frac{1}{b}G_b+\rho_1\left(I_b-\frac{1}{B}I_t\otimes G_B\right)+0\left(\frac{1}{B}I_t\otimes G_B-\frac{1}{b}G_b\right)$ と書ける。したがって affine である。（証明おわり）

注1）　定理1.2は本質的には Shrikhande and Raghavarao [5] によって得られている。

注2）　$g_1=(\mu-1)k/(B-1)$, $g_2=k^2/v$ は整数でなければならない。

§2. PBIB design のブロック構造

m-associate PBIB design（パラメーター $v, b, r, k, \lambda_i, i=1,2,\cdots,m$）の結合行列を N とするとき，一般に $NN'=rk\frac{1}{v}G_v+\sum_{i=1}^{m}\rho_iP_i$ とスペクトル分解できるが，ここでは $\rho_i=0$（some i）となる場合のブロック構造を考える。また $0\leqq\rho_i\leqq rk$。

［補題2.1］　$\rho_i=0$ となるための必要十分条件は $N'P_i=0$ となることである。

証明　（必要）　$(N'P_i)'(N'P_i)=P_iNN'P_i=\rho_iP_i=0$ したがって $N'P_i=0$ である。

（十分）　$\rho_iP_i=NN'P_i=0$ したがって $\rho_i=0$ である。

（証明おわり）

__2.1__. 2-associate PBIB designに対しては

$$NN' = rk\frac{1}{v}G_v + \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 \qquad (2.1)$$

となる。 ここで

$$\rho_i = r - \{(\lambda_1 - \lambda_2)[-\gamma + (-1)^i\sqrt{\Delta}] + \lambda_1 + \lambda_2\}/2$$

$$P_i = \{(-1)^i[(n_1-n_2)+(n_1+n_2)(\gamma-\sqrt{\Delta})]I_v + [(-1)^i(-2n_2-1-\gamma)-\sqrt{\Delta}]A_1$$
$$+ [(-1)^i(2n_1+1-\gamma)-\sqrt{\Delta}]A_2\}/2v\sqrt{\Delta} \qquad i=1,2$$

$$\gamma = p_{12}^2 - p_{12}^1, \quad \Delta = \gamma^2 + 2(p_{12}^2 + p_{12}^1) + 1$$

$$\mathrm{rank}\, P_i = (n_1+n_2)/2 + (-1)^i[n_1 - n_2 + \gamma(n_1+n_2)]/2\sqrt{\Delta}$$

である。

__2.1.1__. Group divisible PBIB design ($v=mn$. 処理がn個づつ m groupsに分かれる)においては

$$n_1 = n-1, \quad n_2 = (m-1)n, \quad p_{12}^1 = 0, \quad p_{12}^2 = n-1, \quad A_1 = I_m \otimes G_n - I_v$$

$$NN' = rk\frac{1}{v}G_v + (rk - v\lambda_2)\left[\frac{m-1}{v}(I_v + A_1) - \frac{1}{v}A_2\right] + (r-\lambda_1)\left[\frac{n-1}{n}I_v - \frac{1}{n}A_1\right]$$

$$\mathrm{rank}\left[\frac{m-1}{v}(I_v+A_1) - \frac{1}{v}A_2\right] = m-1, \quad \mathrm{rank}\left[\frac{n-1}{n}I_v - \frac{1}{n}A_1\right] = m(n-1)$$

となる。 このとき

[定理2.2] Group divisible PBIB design において

(i) $r-\lambda_1=0$ (singular型)であるための必要十分条件は$\frac{k}{n}$が整数でかつ,すべてのブロックは association scheme における groupsを$\frac{k}{n}$個づつ含むことである。

(ii) $rk-v\lambda_2=0$ (semiregular型) であるための必要十

分条件は，$\frac{k}{n}$が整数でかつ，すべてのブロックは各groupの処理を$\frac{k}{n}$個づつ含むことである。

証明　(i)　補題2.1により $N'[\frac{n-1}{n}I_v-\frac{1}{n}A_1]=0$ したがって $N'[I_v-\frac{1}{n}I_m\otimes G_n]=0$ ($A_1=I_m\otimes G_n-I_v$より)，書きなおすと，$nN'=N'I_m\otimes G_n$ となり，これは「処理aがあるブロックBに含まれるとき，aと同じ group の処理はすべてBに含まれる」ことを意味する。各ブロックはk個の処理を含むから結論をえる。

(ii)　補題2.1により $N'[\frac{m-1}{v}(I_v+A_1)-\frac{1}{v}A_2]=0$。
$A_1=I_m\otimes G_n-I_v$，$I_v+A_1+A_2=G_v$，を用いて書きなおすと
$\frac{1}{v}N'[mI_m\otimes G_n-G_v]=0$。　ここで $N'G_v=kE_{b\times v}$ より

$$N'[I_m\otimes G_n]=\frac{k}{m}E_{b\times v}$$

をうる。この式は定理の結論を意味する。(証明おわり)

注)　定理2.2の(i)，および(ii)の必要性は Bose and Connor [1] によって得られている。

2.1.2.　Triangular PBIB design ($v=\frac{n(n-1)}{2}$) においては
$n_1=2(n-2)$，$n_2=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$，$p_{12}^1=n-3$，$p_{12}^2=2n-8$

$$NN'=rk\frac{1}{v}G_v+[r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2]\left\{[(2n-4)I_v+(n-4)A_1-4A_2]/n(n-2)\right\}$$
$$+(r-2\lambda_1+\lambda_2)\left\{[(n-2)(n-3)I_v-(n-3)A_1+2A_2]/(n-1)(n-2)\right\}$$

第2項，第3項の rank は $n-1$，$\frac{n(n-3)}{2}$

となる。　このとき

［定理2.3］　Triangular PBIB design　において

（i）　$r-2\lambda_1+\lambda_2=0$ であるための必要十分条件は，$\frac{2k}{n-1}$が整数でかつ，$N'[A_1-(n-4)I_v]=\frac{2k}{n-1}E_{b\times v}$　である。

（ii）　$r+(n-4)\lambda_1-(n-3)\lambda_2=0$　であるための必要十分条件は，$\frac{2k}{n}$が整数でかつ，すべてのブロックは association scheme の各行の処理を$\frac{2k}{n}$個づつ含むことである。

<u>証明</u>　（i）　補題2.1より $\frac{1}{(n-1)(n-2)}N'[(n-2)(n-3)I_v-(n-3)A_1+2A_2]=0$，

$I_v+A_1+A_2=G_v$ より　$N'[(n-1)(n-4)I_v-(n-1)A_1+2G_v]=0$

$N'G_v=kE_{b\times v}$ より　$N'[A_1-(n-4)I_v]=\frac{2k}{n-1}E_{b\times v}$　である。

（ii）　(i) と同様にして　$N'[2I_v+A_1]=\frac{4k}{n}E_{b\times v}$　をえる，この式は「すべてのブロックは association scheme のかってな2行の処理を$\frac{4k}{n}$個づつ含む」ことを意味し，定理の結論と同値である。　　　　　　　　　　　　（証明おわり）

注）　定理2.3 (ii) の必要性は Raghavarao［3］により得られている。

<u>2.1.3</u>.　　2.1.2と同様の方法により

［定理2.4］　L_i-PBIB design（$v=S^2$，i-constraints $2\leq i\leq S$）において

（i）　$r-i\lambda_1+(i-1)\lambda_2=0$ であるための必要十分条件は，

$\frac{(i-1)k}{s}$が整数でかつ，$N'[A_i-(s-i)I_v]=\frac{(i-1)k}{s}E_{b\times v}$である。

(ii)　$r+(s-i)\lambda_1-(s-i+1)\lambda_2=0$　であるための必要十分条件は，$\frac{k}{s}$が整数でかつ，すべてのブロックは association scheme を定める各 square のなかで同一の文字に対応する処理を$\frac{k}{s}$個づつ含むことである。

注）　定理2.4 (ii) の必要性は Shrikhande and Raghavarao [5] により得られている。

特に $i=2$ のときは，次をえる。

［系］　L_2-PBIB designにおいて，$r+(s-2)\lambda_1-(s-1)\lambda_2=0$ であるための必要十分条件は，$\frac{k}{s}$が整数でかつ，すべてのブロックは association scheme の各行各列の処理を$\frac{k}{s}$個づつ含むことである。

2.2　Rectangular association scheme をもつ 3-associate PBIB design

($v=st$，処理が s 行 t 列に配置されて，同じ行は 1-st，同じ列は 2-nd，他は 3-rd ）においては

$$NN'=rk\tfrac{1}{v}G_v+[r-\lambda_1+(s-1)(\lambda_2-\lambda_3)]\{[(t-1)I_v-A_1+(t-1)A_2-A_3]/st\}$$
$$+[r-\lambda_2+(t-1)(\lambda_1-\lambda_2)]\{[(s-1)I_v+(s-1)A_1-A_2-A_3]/st\}$$
$$+[r-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3]\{[(t-1)(s-1)I_v-(s-1)A_1-(t-1)A_2+A_3]/st\}$$

$$A_1=I_s\otimes(G_t-I_t),\quad A_2=(G_s-I_s)\otimes I_t,\quad A_3=(G_s-I_s)\otimes(G_t-I_t)$$

となる。　2.1 と同様にして

［定理2.5］　(i)　$r-\lambda_1+(s-1)(\lambda_2-\lambda_3)=0$　であるための必要十分条件は，$\frac{k}{t}$が整数でかつ，すべてのブロックは association scheme の各列の処理を$\frac{k}{t}$個づつ含むことである。

(ii)　$r-\lambda_2+(t-1)(\lambda_1-\lambda_2)=0$　であるための必要十分条件は，$\frac{k}{s}$が整数でかつ，すべてのブロックは association scheme の各行の処理を$\frac{k}{s}$個づつ含むことである。

(iii)　$r-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0$　であるための必要十分条件は，$N'[s(I_s\otimes G_t)+t(G_s\otimes I_t)-stI_v]=k\,E_{b\times v}$　である。

注）定理2.5 の (i)(ii)の必要性は Vartak ［6］により得られているらしい。

参　考　文　献

［1］ Bose, R.C. and Connor, W.S. (1952). Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. Ann. Math. Statist. 23 367−383.

［2］ 石井吾郎 (1972). 実験計画法／配置の理論 培風館.

［3］ Raghavarao, D. (1960). On the block structure of certain PBIB designs with triangular and L_2 association scheme. Ann. Math. Statist. 31 787−791.

［4］ Shah, S.M. (1967). A note on the block structure of incomplete block designs. J. Indian Statist. Assoc. 5 13−15.

[5] Shrikhande, S. S. and Raghavarao, D. (1963). Affine α-resolvable incomplete block designs. Contributions to Statistics, Presented to Prof. P. C. Mahalanobis on the occasion of his 70 th birthday. Pergamon Press. PP. 471-480.

[6] Vartak, M. N. (1961). On some applications of Kronecker product of matrices to statistical designs. Unpublished Ph. D. Thesis. Univ. of Bombay.