数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 76-87

BIB design のブロック構造と埋め込み定理

広島大 理　浜田 昇
広島大 計算センター 小林 康幸

§1. はじめに

v^*, r^*, λ^* を「$\lambda^*(v^*-1)=r^*(r^*-1)$, $v^*>r^*\geqq 2$」をみたす整数とする．このとき，パラメーター

$$v=v^*-r^*,\quad b=v^*-1,\quad r=r^*,\quad k=r^*-\lambda^*,\quad \lambda=\lambda^* \qquad (1.1)$$

をもつ BIB design を quasi-residual (BIB) design という．

D を(1.1)によって与えられるパラメーター (v,b,r,k,λ) をもつ quasi-residual design とする．このとき，D を含む対称な BIB design (v^*, r^*, λ^*) が存在するならば，design D は（対応する）SBIB design に埋め込み可能であるという．（BIB design の定義等については，文献[3, 4, 8, 9]を参照）

Hall と Connor [5] は $\lambda=1$ または 2 の場合には，どんな quasi-residual design も SBIB design に埋め込み可能であることを示した．一方，Bhattacharya [1] はパラメーター

(16, 24, 9, 6, 3) をもつ BIB design の中には埋め込み不可能な design があることを示した．これは $\lambda \geqq 3$ の場合には，埋め込みが常に可能とは限らないことを示している．($\lambda=3$ の場合の埋め込み定理については，文献 [10] 参照)

ここでは，BIB design のブロック構造に対する必要条件を求め，quasi-residual design が SBIB design に埋め込み可能であるための必要十分条件を与える．さらに，これらの結果を用いて，Hall-Connor の定理の簡単な別証明，および，パラメーター (22, 33, 12, 8, 4) をもつ BIB design が存在するならば，どんなブロック構造をもつ design でなければならぬかを明らかにする．(詳しくは，文献 [6, 7] 参照)

§2. BIB design のブロック構造に対する必要条件

定理 2.1. パラメーター (v, b, r, k, λ) をもつどんな BIB design の結合行列 N に対しても，$N^T N$ $(\equiv S_b = \| s_{\alpha\beta} \|)$ は次の 3 つの条件を満足する $b \times b$ の対称行列でなければならぬ．

(a) $s_{\alpha\beta}$ $(1 \leqq \alpha, \beta \leqq b)$ は $0 \leqq s_{\alpha\beta} \leqq k$, $s_{\alpha\alpha} = k$ をみたす整数である．

(b) $S_b \underline{J}_b = rk \underline{J}_b$, i.e., $\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} = \sum_{j=1}^{b} s_{j\beta} = rk$.

(c) $S_b^2 = (r-\lambda) S_b + \lambda k^2 G_b$, i.e.,

$$\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} s_{\beta j} = (r-\lambda) s_{\alpha\beta} + \lambda k^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, b)$$

ここに，J_b，G_b はそれぞれすべての要素が1であるb次元列ベクトル，$b \times b$ 行列である．

<u>証明</u>　(a) は明らか．$S_b J_b = N^T N J_b = rk J_b$，$S_b^2 = (N^T N)(N^T N) = N^T(NN^T)N = N^T\{(r-\lambda)I_b + \lambda G_v\}N = (r-\lambda)S_b + \lambda k^2 G_b$　$\therefore$ $S_b^2 = (r-\lambda)S_b + \lambda k^2 G_b$．　　Q.E.D.

以下，定理2.1の3条件をみたす$b \times b$の対称行列S_bの全体を<u>$BSM(v, b, r, k, \lambda)$</u>で表わす．

<u>定理2.2.</u>　$BSM(v, b, r, k, \lambda)$ に属するどんな行列 $S_b = \| s_{\alpha\beta} \|$ に対しても，$x_i(\alpha) = {}^{\#}\{\beta : s_{\alpha\beta} = i,\ \beta \neq \alpha,\ 1 \leqq \beta \leqq b\}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, k)$ は次の条件をみたさなければならぬ．

$$\sum_{i=0}^{k} x_i(\alpha) = b-1, \quad \sum_{i=0}^{k} i\, x_i(\alpha) = k(r-1), \quad \sum_{i=0}^{k} i(i-1) x_i(\alpha) = k(k-1)(\lambda-1)$$

$(\alpha = 1, 2, \cdots, b)$．

<u>証明</u>　$\sum_{i=0}^{k} i\, x_i(\alpha) = \sum_{\beta=1}^{b} s_{\alpha\beta} - s_{\alpha\alpha}$，$\sum_{i=0}^{k} i^2 x_i(\alpha) = \sum_{\beta=1}^{b} s_{\alpha\beta}^2 - s_{\alpha\alpha}^2$ であるから，定理2.1より定理2.2が成り立つ．　　Q.E.D.

<u>定理2.3.</u>　(i)　$BSM(v, b, r, k, \lambda)$ のどんな行列 S_b に対しても，S_b は $\mathrm{Rank}(S_b) = v$ をみたす半正定値行列である．

(ii)　S_b のどんな $t \times t$ 主対角行列 S_t $(2 \leqq t \leqq b)$ に対しても，

$$C_t^{(1)} = r(r-\lambda)I_t + \lambda k G_t - r S_t, \quad C_t^{(2)} = r S_t - \lambda k G_t$$

は $\mathrm{Rank}(C_b^{(1)}) = b - v$，$\mathrm{Rank}(C_b^{(2)}) = v$ をみたす半正定値行列である．

証明　(ii)　$C_t^{(i)}$ $(i=1,2)$ は $C_b^{(i)}$ の主対角行列であるから，$C_b^{(i)}$ が半正定値行列であることを示せばよい。定理 2.1 と $vr=bk$，$\lambda(v-1)=r(k-1)$ より，$\{C_b^{(i)}\}^2 = r(r-\lambda)C_b^{(i)}$ が成り立つ．$r(r-\lambda)>0$ であるから，これは $C_b^{(i)}$ が半正定値行列であることを示している．$D_b^{(i)} = \frac{1}{r(r-\lambda)}C_b^{(i)}$ とおくと，$D_b^{(i)}$ は *idempotent*（かつ，対称）である．従って，$\mathrm{Rank}(C_b^{(i)}) = \mathrm{Rank}(D_b^{(i)}) = \mathrm{trace}\,(D_b^{(i)}) = b-v$ or v $(i=1$ or $2)$ である．

(i)　$D_b^{(2)} = \frac{1}{r(r-\lambda)}\{rS_b - \lambda k G_b\}$ より，$S_b = rk(\frac{1}{b}G_b) + (r-\lambda)(D_b^{(2)} - \frac{1}{b}G_b)$，$(D_b^{(2)} - \frac{1}{b}G_b)$，$\frac{1}{b}G_b$ は互いに直交する *idempotent* であるから，S_b は $\mathrm{Rank}(S_b) = \mathrm{Rank}(D_b^{(2)}) = v$ をみたす半正定値行列である．　Q.E.D.

(注)　S_b は $\mathrm{Rank}(S_b) = v$ の半正定値行列であるから，S_b の $v\times v$ 主対角行列のうちには *rank* が v のものが存在する．同様に，C_b の $(b-v)\times(b-v)$ 主対角行列のうちにも，*rank* が $b-v$ のものがある．以下，$b>v$ とする．

定理 2.4.　$v\times v$ の正定値行列 S_{11} を含む $b\times b$ の対称行列：

$$S_b = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

が $BSM(v,b,r,k,\lambda)$ の行列であるための必要十分条件は

(i)　S_b の要素は定理 2.1 の条件 (a) をみたす．

(ii)　$S_{12}S_{12}^T = (r-\lambda)S_{11} + \lambda k^2 G_v - S_{11}^2$，

$$S_{12}\underline{I}_{b-v} = rk\,\underline{I}_v - S_{11}\underline{I}_v,\quad \underline{J}_v^T S_{11}^{-1} S_{12} = \underline{J}_{b-v}^T.$$

(iii)　$S_{22} = S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}$ であること．　（証明省略）

§3. 埋め込み定理

この節では，*quasi-residual design* が SBIB *design* に埋め込みできるための必要十分条件，および，対応する SBIB *design* が存在しない場合に，*quasi-residual design* が存在するための必要十分条件を与える．以下，$S_b = N^T N$ となる結合行列 N が存在するような BSM(v, b, r, k, λ) の行列 S_b の全体を BSM$^*(v, b, r, k, \lambda)$ で表わし，

$$\mathrm{BSM}_1(v,b,r,k,\lambda) = \{S_b : S_b \in \mathrm{BSM}(v,b,r,k,\lambda),\ s_{\alpha\beta} \leqq \lambda\ (1 \leqq \alpha < \beta \leqq b)\}$$

$$\mathrm{BSM}_2(v,b,r,k,\lambda) = \mathrm{BSM}(v,b,r,k,\lambda) - \mathrm{BSM}_1(v,b,r,k,\lambda)$$

$$\mathrm{BSM}_i^*(v,b,r,k,\lambda) = \mathrm{BSM}_i(v,b,r,k,\lambda) \cap \mathrm{BSM}^*(v,b,r,k,\lambda)$$

$W_v = (r^* - \lambda^*) I_v + \lambda^* G_v$ とする．

<u>定理 3.1</u>．$\lambda^*(v^*-1) = r^*(r^*-1)$, $v^* > r^* \geqq 2$ をみたす任意の整数 v^*, r^*, λ^* に対して，BSM$(v^*, v^*, r^*, r^*, \lambda^*)$ $= \{W_{v^*}\}$ である．

<u>証明</u>　定理 2.2 より $\sum_{i=0}^{r^*} (i - \lambda^*)^2 x_i(\alpha) = 0$　$(\alpha = 1, 2, \cdots, v^*)$ をうる．これは，$i \neq \lambda^*$ なるどんな i に対しても $x_i(\alpha) = 0$, i.e., $s_{\alpha\beta} = \lambda^*$ $(\alpha \neq \beta)$ を意味する．従って，BSM$(v^*, v^*, r^*, r^*, \lambda^*)$ のどんな行列も W_{v^*} と一致する．　Q.E.D.

パラメーター(v^*, r^*, λ^*)をもつSBIB designが存在するならば，このdesignからパラメーター

$$\tilde{v} = v^* - r^*,\ \tilde{b} = v^* - 1,\ \tilde{r} = r^*,\ \tilde{k} = r^* - \lambda^*,\ \tilde{\lambda} = \lambda^* \tag{3.1}$$

$$v' = k^*,\ b' = v^* - 1,\ r' = r^* - 1,\ k' = \lambda^*,\ \lambda' = \lambda^* - 1 \tag{3.2}$$

をもつ2つのBIB designを得ることが出来る.

定理3.2. $BSM(v', b', r', k', \lambda')$と$BSM_1(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$の間には1対1対応がある．すなわち，

(i) $BSM(v', b', r', k', \lambda')$のどんな行列$T_1$に対しても，$W_{v^*-1} - T_1$は$BSM_1(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$の行列である.

(ii) 逆に，$BSM_1(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$のどんな行列$T_2$に対しても，$W_{v^*-1} - T_2$は$BSM(v', b', r', k', \lambda')$の行列である．([6]参照)

定理3.3. (3.1)によって与えられるパラメーター$(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$をもつquasi-residual design D_2がSBIB design(v^*, r^*, λ^*)に埋め込み可能であるための必要十分条件はdesign D_2の結合行列N_2が次の2つの条件をみたすことである.

(a) $N_2^T N_2 (\equiv T_2)$のどの非対角要素もλ^*よりも大きくない非負の整数である.

(b) $W_{v^*-1} - T_2$が$BSM^*(v', b', r', k', \lambda')$の行列である.

系3.1. 特に，$BSM(v', b', r', k', \lambda') = BSM^*(v', b', r', k', \lambda')$が成り立つ場合には，パラメーター$(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$をもつquasi-residual designがSBIB design(v^*, r^*, λ^*)に埋め込み可能で

あるための必要十分条件は $N_2^T N_2$ の非対角要素が λ^* より大きくない非負の整数であることである．ここに，N_2 は *quasi-residual design* の結合行列である．

$\mathfrak{A} = BSM(v', b', \cdots, \lambda') - BSM^*(v', b', \cdots, \lambda')$, $\sigma(\mathfrak{A}) = \{\mathbb{W}_{v^*-1} - T : T \in \mathfrak{A}\}$ とおくと，定理 3.3 から次の定理をうる．

<u>定理 3.4.</u>　パラメーター (v^*, r^*, λ^*) をもつ SBIB *design* が存在しない場合に，(3.1) によって与えられるパラメーターをもつ *quasi-residual design* が存在するための必要十分条件は，$BSM_2^*(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda}) \neq \phi$ *or* $\sigma^*(\mathfrak{A}) \neq \phi$ が成り立つことである．ここに，$\sigma^*(\mathfrak{A})$ は $N^T N = S$ となる結合行列 N が存在するような $\sigma(\mathfrak{A})$ の行列 S からなる集合を表わす．

<u>系 3.2.</u>　パラメーター (v^*, r^*, λ^*) をもつ SBIB *design* が存在せず，かつ，$\mathfrak{A} = \phi$ が成り立つ場合に，パラメーター $(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda})$ をもつ *quasi-residual design* が存在するための必要十分条件は $BSM_2^*(\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{r}, \tilde{k}, \tilde{\lambda}) \neq \phi$ が成り立つことである．

<u>§4.　$\lambda = 1$ *or* 2 の *quasi-residual design* の埋め込み定理の別証明</u>

<u>(I)　$\lambda = 1$ の場合</u>には，

$$\tilde{v} = k^2 - 2k + 1,\quad \tilde{b} = k^2 - k,\quad \tilde{r} = k,\quad \tilde{k} = k - 1,\quad \tilde{\lambda} = 1 \tag{4.1}$$

$$v' = k,\quad b' = k^2 - k,\quad r' = k - 1,\quad k' = 1,\quad \lambda' = 0 \tag{4.2}$$

<u>補題 4.1.</u>　$\lambda=1$ の場合には，$BSM(v',b',r',k',\lambda')=BSM^*(v',b',r',k',\lambda')=\{P^T(G_{k-1}\otimes I_k)P : P$ は $b'\times b'$ 置換行列$\}$ である.

<u>証明</u>　$S=\|s_{\alpha\beta}\|$ を $BSM(v',b',\cdots,\lambda')$ の任意の行列とすると，定理 2.2 より，$\chi_0(\alpha)=(k-1)^2$, $\chi_1(\alpha)=k-2$, $\chi_2(\alpha)=\cdots=\chi_{k'}(\alpha)=0$, i.e., $s_{\alpha\beta}=0$ or 1 $(\alpha,\beta=1,2,\cdots,b', \alpha\neq\beta)$ である. $i,j,k=1$ or 2 に対して，

$$n_j(\alpha)=\#\{\beta : s_{\alpha\beta}=2-j,\ 1\leqq\beta\leqq b',\ \beta\neq\alpha\}$$

$$P^i_{jk}(\alpha,\beta)=\#\{\gamma : s_{\alpha\gamma}=2-j,\ s_{\beta\gamma}=2-k,\ 1\leqq\gamma\leqq b',\ \gamma\neq\alpha,\beta\}$$

(但し，$s_{\alpha\beta}=2-i$) とおく. $n_1(\alpha)=\chi_1(\alpha)=k-2$, $n_2(\alpha)=\chi_0(\alpha)=(k-1)^2$
定理 2.1 の (C) より，$\sum_{\gamma=1}^{b'}s_{\alpha\gamma}s_{\beta\gamma}=(s_{\alpha\alpha}+s_{\beta\beta})s_{\alpha\beta}+P^i_{11}(\alpha,\beta)=(k-1)s_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\alpha}=s_{\beta\beta}=1$, $s_{\alpha\beta}=2-i$ であるから，$P^1_{11}(\alpha,\beta)=k-3$, $P^2_{11}(\alpha,\beta)=0$ である.

従って，$\{1,2,\cdots,b'\}$ の異なる元 α,β に対して，$s_{\alpha\beta}=1$ ならば，α と β は first associate，$s_{\alpha\beta}=0$ ならば α と β は second associate と定義すると，これは 2 associate class の association scheme である. 故に，group-divisible type の association scheme の一意性より，

$$BSM(v',b',\cdots,\lambda')=\{P^T(G_{k-1}\otimes I_k)P : P \text{ は } b'\times b' \text{ 置換行列}\}$$

が成り立つ. また，$N=J^T_{k-1}\otimes I_k$ とおくと，N は BIB design (v',b',r',k',λ') の結合行列で，しかも，$N^TN=G_{k-1}\otimes I_k$ であるから，結論をうる.　Q.E.D.

<u>補題 4.2.</u>　$\lambda=1$ の場合には，$BSM(\tilde{v},\tilde{b},\cdots,\tilde{\lambda})$ のどんな行列 $S=\|s_{\alpha\beta}\|$ に対しても，$0\leqq s_{\alpha\beta}\leqq\lambda^*(=1)$ $(\alpha\neq\beta)$ である.

証明 $\sum_{i=0}^{\tilde{k}} i(i-1)x_i(\alpha)=0$ より明らかである． Q.E.D.

系3.1と補題4.1, 4.2より，次のことが成り立つ．

定理4.1. $\lambda=1$ の場合には，どんな quasi-residual design も SBIB design に埋め込み可能である．

(II) $\lambda=2$ の場合には，$k \geq 4$ なる整数 k を用いて，

$$\tilde{v}=\binom{k-1}{2},\quad \tilde{b}=\binom{k}{2},\quad \tilde{r}=k,\quad \tilde{k}=k-2,\quad \tilde{\lambda}=2 \tag{4.3}$$

$$v'=k,\quad b'=\binom{k}{2},\quad r'=k-1,\quad k'=2,\quad \lambda'=1 \tag{4.4}$$

補題4.3. $\lambda=2$, $k\neq 8$ の場合には，$BSM(v',b',\cdots,\lambda')=BSM^*(v',b',\cdots,\lambda')=\{P^T(2I_{b'}+A_1)P : P$ は $b'\times b'$ の置換行列$\}$ である．ここに A_1 は triangular type の association scheme の 1st ass. class の association matrix である．

証明 補題4.1と同様の方法を用いて，$n_1(\alpha)=2(k-2)$, $n_2(\alpha)=\binom{k-1}{2}$, $P_{11}^1(\alpha,\beta)=k-2$, $P_{11}^2(\alpha,\beta)=4$ をうる．従って，triangular type の association scheme の一意性より，補題4.3をうる．

補題4.4. $\lambda=2$ の場合には，$BSM(\tilde{v},\tilde{b},\cdots,\tilde{\lambda})$ のどんな行列 $S=\|s_{\alpha\beta}\|$ に対しても，$0\leqq s_{\alpha\beta}\leqq\lambda^*(=2)$ $(\alpha\neq\beta)$ である．

証明 $\sum_{i=0}^{\tilde{k}}(i-1)(i-2)x_i(\alpha)=0$ より，明らかである．

定理4.2. $\lambda=2$ の場合には，どんな quasi-residual design も SBIB design に埋め込み可能である．

証明 $k=8$ の場合には，BIB design (21, 28, 8, 6, 2) は存在しないから，補題4.3, 4.4と系3.1より結論をうる．

§5. パラメーター(22,33,12,8,4)をもつBIB designのブロック構造

パラメーター(22, 33, 12, 8, 4)をもつBIB designが存在するかどうかは未知である。ここでは、このようなパラメーターをもつBIB designが存在するならば、どんなブロック構造をもつものでなければならぬかを調べる。

Dをパラメーター(22, 33, 12, 8, 4)をもつ任意のBIB designとし、Dの33個のblockをB_α($\alpha=1,2,\cdots,33$)で表わし、

$$n_i(\alpha) = {}^{\#}\{B_\beta : |B_\alpha \cap B_\beta| = i,\ 1 \leqq \beta \leqq 33,\ \beta \neq \alpha\}$$

($i=0,1,2,\cdots,8$)とおく。Connor [2]の結果：

$$-(r-\lambda-k) \leqq s_{\alpha\beta} \leqq \frac{1}{r}\{2\lambda k + r(r-\lambda-k)\}$$

($\alpha,\beta=1,2,\cdots,b,\ \alpha\neq\beta$)と定理2.2より次のことが成り立つ。ここに、$s_{\alpha\beta}=|B_\alpha\cap B_\beta|$である。

定理5.1. パラメーター(22, 33, 12, 8, 4)をもつどんなBIB designのどんなblock B_α($1\leqq\alpha\leqq 33$)に対しても、$n_i(\alpha)=0$ ($i=6,7,8$)で、かつ、$(n_0(\alpha), n_1(\alpha), \cdots, n_5(\alpha))$は次の9通りのうちのいずれかでなければならぬ。

表 5.1

Type	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	0	0	12	16	4	0
2	0	1	9	19	3	0
3	0	2	6	22	2	0

4	1	0	6	24	1	0
5	0	3	3	25	1	0
6	0	0	11	19	1	1
7	0	1	8	22	0	1
8	0	4	0	28	0	0
9	1	1	3	27	0	0

定理2.1等を用いることにより，次の定理をうる．（詳しくは，[7] 参照）

<u>定理5.2.</u> パラメーター（22, 33, 12, 8, 4）をもつどんなBIB design に対しても，Type 5からType 9までのblockは一つも存在しない．すなわち，パラメーター（22, 33, 12, 8, 4）をもつBIB designが存在するならば，そのdesignのどのblockもType 1から4までのものでなければならぬ．

さらに，パラメーター（22, 33, 12, 8, 4）をもつどんなBIB designもType 1のblockもType 3のblockも含まないことが示されるならば，パラメーター（22, 33, 12, 8, 4）をもつBIB designは存在しないことが示される．

参 考 文 献

1. K. N. Bhattacharya, A new balanced incomplete block design, Sci. and Culture 9 (1944), 508.

2. W. S. Connor, On the structure of balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 57-71.

3. M. Hall, Combinatorial theory, Blaisdell Pub. Comp. (1967).

4. ホール著 岩堀信子訳, 組合せ理論, 吉岡書店 (1971).

5. M. Hall, Jr. and W. S. Connor, An embedding theorem for balanced incomplete block designs, Canadian J. Math. 6 (1953), 35-41.

6. N. Hamada and Y. Kobayashi, On the block structure of BIB designs and embedding theorems, Submitted to J. Combinatorial Theory (1976).

7. N. Hamada and Y. Kobayashi, On the block structure of BIB designs with parameters $v = 22$, $b = 33$, $r = 12$, $k = 8$ and $\lambda = 4$, Submitted to J. Combinatorial Theory (1976).

8. 永尾汎著, 群とデザイン, 岩波書店(1974).

9. D. Raghavarao, Constructions and combinatorial problems in design of experiments, John Wiley & Sons, New York (1971).

10. N. M. Singhi and S. S. Shrikhande, Embedding of quasi-residual designs with $\lambda = 3$, Utilitas Mathematica 4 (1973), 35-53.