数理解析研究所講究録
第 285 巻 1976 年 96-102

Resistant BIB design について

愛媛大 教育　大森博之

§1 序

BIB design は一般的なモデルのもとで2つの"balanced"という性質をもっている。i.e. (i) variance balanced: 処理効果のすべての normalized estimable linear function が同一の分散をもつ。(ii) pairwised balanced: 処理のすべての対が同一の block に一定回数だけ施されている。

Hedayat & John [2] は BIB design において、いくつかのある処理があって、それらが施されているすべての experimental units を取り除いた残りの design が、(i), (ii) の性質を保存している事を要求する立場から locally resistant BIB design, globally resistant BIB design 及び susceptible BIB design なるものを提起し、特に位数1の locally resistant 及び

globally resistant BIB design の特徴付けを行なっている。

この特徴付けをもとにして，位数1の locally resistant BIB design の若干の例を述べるのが，この講演の目的である。

§2 定義及び諸結果

Dを処理の集合 Ω 上の BIB (v, b, r, k, λ) design とし，$\Omega \supset L$ $(|L| = n \leqq v-2)$ とする。

Dから，Lに属する処理が施されているすべての experimental units を取り除いて出来る design を D_L とする。

[定義] D: 位数 n の locally resistant BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\exists}L$ $(|L|=n)$ s.t. D_L variance balanced

[定義] D: 位数 n の globally resistant BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\forall}L$ $(|L|=n)$, D_L variance balanced

[定義] D: susceptible BIB design

$\Leftrightarrow$ $\Omega \supset {}^{\nexists}L$ s.t. D_L variance balanced

位数1の場合について以下のような特徴付けが Hedayat と John [2] によってなされている。

[定理1]　Dが処理 α に関して locally resistant BIB design となる為の必要十分条件は D_1（従って D_2）が BIB design となる事である。

ここに D_2 は処理 α が施されていないすべての block から成る design で，又 D_1 は $D_1 = D_{\alpha} - D_2$，

[定理2]　Dが位数1の globally resistant BIB design となる為の必要十分条件は Dが3－design となる事である。

定理1によって，位数1の locally resistant BIB design（ある場合には globally resistant も）を構成するには，BIB design D_1 があって，D_1のすべての block に新しい処理 α を付け加え（その design を $\overline{D}_1$ とする。）$D = \overline{D}_1 \cup D_2$ が BIB design となるような BIB design D_2 が存在するかどうかを調べればよい。　もしこのような BIB design D_2 が存在するとき，D_1 は embeddable という。

[定理 3]　$D_1(v, b, r, k, \lambda)$ が embeddable である為の必要条件は $(k+1) \mid b(v-k)$ である。
更にこのとき D_2, D はそれぞれ
$D_2(v,\ b(v-k)/k+1,\ b-r,\ k+1,\ r-\lambda)$,
$D(v+1,\ b(v+1)/k+1,\ b,\ k+1,\ r)$ である。

上の定理の必要条件が十分条件であるかどうか未知である。又上記の D において
$v+1 \geqq 2(k+1)$ としてよく、従って $v \geqq 2k+1$ と仮定してよい。

§3　Examples

Example (a)　$D_1(2k+1, b, r, k, \lambda)$ の場合。
D_2 は $D_2(2k+1, b, b-r, k+1, r-\lambda)$ となりこれは D_1 の complementary design の parameters と一致する。
次の結果は Hedayat & John [2] による。

[定理 4]　$D = \bar{D}_1 \cup D_2$ は位数 1 の globally resistant BIB design となる。(i.e. D は $3-(2k+2, k+1, \lambda)$ design)。但し、D_2 は D_1 の complementary design。

$v = 2k+1$ となる design の例として $D_1(4t+3, 4t+3, 2t+1, 2t+1, t)$ があるが、この design については次の事がいえる。

［定理 5］ $D_1(4t+3, 4t+3, 2t+1, 2t+1, t)$ が存在するとき、$D = \bar{D}_1 \cup D_2$ は $(4t+4, 8t+6, 4t+3, 2t+2, 2t+1)$ なる BIB design で、これは位数 $2t+2$ の locally resistant BIB design となる。但し D_2 は D_1 の complementary design。

Example (b) $D_1(2k+2, b, r, k, \lambda)$ の場合。
D_1 が embeddable である為の必要条件から
$D_1(2k+2,\ m(k+1),\ mk/2,\ k,\ mk(k-1)/2(2k+1))$,
$D_2(2k+2,\ m(k+2),\ m(k+2)/2,\ k+1,\ mk(k+2)/2(2k+1))$
となる。これより

［定理 6］ $D_1(2k+2, m(k+1), mk/2, k, mk(k-1)/2(2k+1))$, $D_2(2k+2, m(k+2), m(k+2)/2, k+1, mk(k+2)/2(2k+1))$ の存在は位数 1 の locally resistant BIB design $D(2k+3, m(2k+3), m(k+1), k+1, mk/2)$ の存在を意味する。

ただし m は (イ): $k = 6t+3$ 又は $6t+5$ のとき

$m=2(2k+1)n$,　(ロ)：$k=6t+1$ のとき

$m=2(4t+1)n$,　(ハ)：$k=6t$ 又は $6t+2$ のとき

$m=(2k+1)n$,　(ニ)：$k=6t+4$ のとき $m=(4t+3)n$.

［系］　定理 6 の D_1, D_2 が存在するとき

$3-(2k+4,\ k+2,\ mk/2)$ design が存在する。

（注意）　定理 6 の D_1, D_2 及びそれらの complementary design の結合行列を各々 N_1, N_2, N_1^c, N_2^c とするとき、新しい処理 x, y をつけ加え、結合行列 N^* をもつ design D^* は $\{x, y\}$ に関し fully locally resistant BIB design [4] である。ここに

$$N^* = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1\cdots 1 & 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ 1\cdots 1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 1\cdots 1 \\ N_1 & N_2 & N_1^c & N_2^c \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{処理 } x \\ \longleftarrow \quad 〃 \ y \\ \\ \end{array}$$

さらに定理 6 の D_1 において、(イ) で $n=1$ の場合、D_1 は位数 $2k+2$ の $k-1$ 個の mutually orthogonal latin squares を用いて構成出来る [3] が、(ロ), (ハ), (ニ) の一般的な構成方法は出来ていないようである。

参考文献

[1] R.C. Bose (1939) On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. of Eugenics, 9 353–399

[2] A. Hedayat & P.W.M. John (1974) Resistant and susceptible BIB designs. Ann. Statist. 2, 148–158.

[3] J. F. Lawless (1971) Note on a family of BIBD's and sets of mutually orthogonal latin squares. Jour. Comb. Theory 11 101–105.

[4] B.M. Most (1975) Resistance of Balanced Incomplete Block Designs Ann. Statist. 3, 1149–1162