数理解析研究所講究録
第 286 巻 1977 年 67-76

$H_{2n+1}(B\Gamma_n, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ なる全射が存在するという Thurston の定理について

埼玉大学　理　水谷忠良

§0 Thurston は[2]において，S^3 に互に foliated cobordant でない余次元1葉層構造を構成し，$H_3(B\Gamma_1, \mathbb{Z})$ から実数の加群 $\mathbb{R}$ への全射が存在することを示した。その写像は葉層構造の Godbillon-Vey 形式を多様体上で積分することで与えられる。余次元2以上の場合にも Godbillon-Vey 形式が存在するので，同様の事実が成立するであろうことは十分予想されていたが，3次元の場合の単純な類推はうまくゆかない。しかし事実はやはり予想通りであって，同様の全射が存在する。ここで紹介するのは同じ Thurston による $H_{2n+1}(B\Gamma_n, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ なる全射が存在することの証明である。厳密な証明には細かい計算が必要であるが，ここではそれを略して大筋を述べることにする。なお最近 J. Heitsch は他の exotic な特性類を用いて $\mathbb{R}$ の何個かの直和への全射準同型が存在することを示して，Thurston の定理を拡張している。

本稿は，阪市大森田茂之氏による Thurston の講義ノートをもとに筆者の独断的解釈を交えて書かれたものであることを断っておきたい。

§1. Godbillon−Vey form. $(W^{n+p}, \mathcal{F})$ を滑らかな多様体 W^{n+p} 上の余次元 n の滑らかな葉層構造とする。$\mathcal{F}$ が1−形式の系 $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$ で定義されているとき，大域的な n-形式 Ω で局所的には $\Omega = k\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ (k：正値関数) と書かれるものが存在する。($\mathcal{F}$ は横断的向きづけ可能であるとする。1の分解を用いればよい)。

$\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$ が $\mathcal{F}$ を定義していることから，Frobenius の積分可能条件が成り立つが，それは Ω を用いて

$$d\Omega = \alpha \wedge \Omega$$

となる1-形式 α が存在する，ということと同値であることが言える。

定義　$\alpha \wedge (d\alpha)^n = \gamma$ を Godbillon−Vey 形式と呼ぶ。

γ が $(2n+1)$-次の閉形式であり，その DeRham コホモロジー類は $\mathcal{F}$ だけにより，Ω や α のとり方によらず定まることが証明できる[　　]。

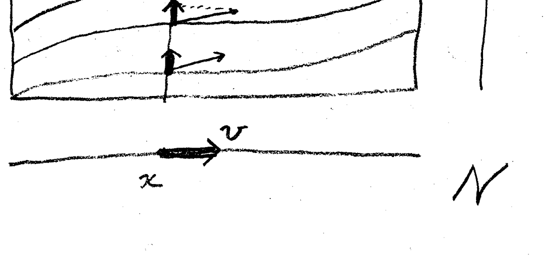
したがって，とくに W が $(2n+1)$ 次元の閉多様体であれば γ を W 上で積分すると実数 $\int_W \gamma = gv(W, \mathcal{F})$ が定まり，0と異なる値をとる可能性がある。$gv(W, \mathcal{F})$ を Godbillon−Vey 特性数と呼ぶ。

§2. Foliated M-product に対する公式。

$W = N \times M$ とし、N 上の自明なバンドルと考える。N の次元を $(n+1)$ とし、M の次元を n とする。ファイバーに横断的な余次元 n の葉層構造を foliated bundle というが、とくに M をファイバーとする自明なバンドルに対しては上のように foliated M-product と名前で呼ぶ。

$(N \times M, \mathcal{F})$ を foliated M-product とするとき、N の接空間 T_xN から M 上のベクトル場 $\mathcal{L}(M)$ への線形な写像 m を次のように定義する。

$\pi : N \times M \longrightarrow M$ を射影とする。T_xN の元 v に対し $\pi^{-1}(x)$ $(\cong M)$ の各点 y を始点とする v の lift $\tilde{v}_y$ が定まる。$\tilde{v}_y$ はもちろん $\mathcal{F}$ に接するベクトルで π で落すと v に写るものと定義するのである。$W = N \times M$ は大域的に trivialization が指定されているので $\tilde{v}_y$ を $\pi^{-1}(x)$ に射影することが意味をもつ。$\pi^{-1}(x)$ は M と同一視できるから、それは M の各点に接ベクトルを、すなわち M 上のベクトル場を定める。これを $m(v)$ と定義する。



$\mathcal{F}$が滑らかならば，$m(v)$が滑らかになることは容易に想像される。

次に，$\mathcal{L}(M)$の$(n+1)$-次元のコホモロジーの元βについて述べる。MにRiemann計量を定め，その体積要素をωとするとき，$\operatorname{div} X$，$X \in \mathcal{L}(M)$はリイ微分L_Xによって

$$L_X \omega = (\operatorname{div} X)\omega$$

となる関数のことであった。$\mathcal{L}(M)$のGel'fand-Fuchsコホモロジー類(その代表元)をdivを使って

$$\beta(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$$
$$= \int_M (\operatorname{div} X_1)\, d(\operatorname{div} X_2) \wedge \cdots \wedge d(\operatorname{div} X_{n+1})$$

によって定める。dは外微分作用素で，被積分形式は丁度n次形式である。Stokesの定理を用いると，βが$(n+1)$次の交代形式であることがわかる。βがGel'fand-Fuchsの意味でコサイクルになることもわかるが計算は少し面倒である。

上のβと写像mを用いるとGodbillon-Vey特性数は次のように書くことができる。

補題　$(N^{n+1} \times M^n, \mathcal{F})$をfoliated M-productとすると，$gv(N \times M, \mathcal{F}) = \int \beta\left(m\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, m\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$である。ただし$(x^1, \cdots, x^{n+1})$は$N$の局所座標である。

§3 定理と葉層構造の構成　証明する定理は次の定理である。

定理　任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ に対して，$(2n+1)$ 次元の閉多様体 W^{2n+1} とその上の余次元 n の葉層構造 $\mathcal{F}$ があって

$$gv(W, \mathcal{F}) = r$$

とすることができる。

Haefliger 構造の分類空間 $B\Gamma_n$ については次の系が言えることになる。

(系) 全射 $H_{2n+1}(B\Gamma_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

実際に定理の証明をするときには W として $\Sigma \times T^{n-1}$ 上の S^n bundle，$\mathcal{F}$ としては fibre に横断的な葉層構造をとる。(Σ は2次元閉曲面である)。以下に $\mathcal{F}$ の構成を述べる。方針は $SL(2;R) \times T^{n-1}$ から $Diff(S^n)$ の表現(すなわち $SL(2;R) \times T^{n-1}$ の S^n への作用)をたくさん作って，$SL(2;R)$ の Totally disconnected subgroup Γ を用いて，商空間 $(H \times R^{n-1}) \underset{\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}}{\times} S^n$ 上に $\mathcal{F}$ を作ることである。(H は上半平面である)。

$\mathfrak{sl}(2;R)$ を $SL(2,R)$ のリイ環，$\mathcal{L}(R^{n+1})$, $\mathcal{L}(S^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^{n+1}$, S^n 上のベクトル場の作るリイ環とする。

$SL(2;R)$ は $R^{n+1}=R^2\times R^{n-1}$ の R^2 成分に線形写像として自然に作用するから、リイ環の準同型

$$\lambda_{n+1}:\ sl(2;R)\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$$

が定まる。また、S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の oriented lines と考えれば、同様に考えて

$$\rho_{n+1}:\ sl(2;R)\longrightarrow \mathcal{L}(S^n)$$

も得られる。

$n=1$ のとき、$\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)=C^\infty(\mathbb{R}^2;R^2)$ の元として $e_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を(極座標の)半径方向のベクトル場(1次元)と考えると $a\in sl(2R)$ に対し $\lambda_2(a)=k(\theta)e_2+\rho_2(a)$ と書かれるが、$\operatorname{div}\lambda_2(a)=0$ より $k(\theta)=-\frac{1}{2}\operatorname{div}\rho_2(a)$ がわかるので $\lambda_2(a)=-\frac{1}{2}\operatorname{div}\rho_2(a)e_2+\rho_2(a)$ である。

$n\geq 2$ のとき $\lambda_{n+1}(a)=k(\theta)\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&\\\hline &0&0\end{array}\right)+l(\theta)\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&\\\hline &0&0\end{array}\right)$

の形に書かれるが、$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&\\\hline &0&0\end{array}\right)=e_{n+1}$, $l(\theta)\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&\\\hline &0&0\end{array}\right)=\tilde{\rho}_2(a)$

と置き e_{n+1} の S^n への射影を e'_{n+1} と置くと

$$\rho_{n+1}(a)=-\frac{1}{2}\operatorname{div}\rho_2(a)\,e'_{n+1}+\tilde{\rho}_2(a)$$

となる。

ここで S^n を結 $S^1*S^{n-1}=S^1\times I\times S^{n-1}/\sim$ と考えて Join coordinate $(\theta,t,\varphi)\in S^1\times I\times S^{n-1}$ とると

$\rho_{n+1}(a)$の式で

(イ) $\rho_2(a)$はθ方向のベクトル場，(ロ) $\mathrm{div}(a)$はθだけの関数 (ハ) e'_{n+1}はt方向のベクトル場

であることは明らかである。

さて，$f_i : S^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}$を任意の$C^\infty$関数とし，$Y$を$t$方向のベクトル場で$S^1 \times 0 \times S^{n-2}$の$S^n$内の像($\approx S^1$)の近傍で0となる$C^\infty$ベクトル場とする. 準同型 σ

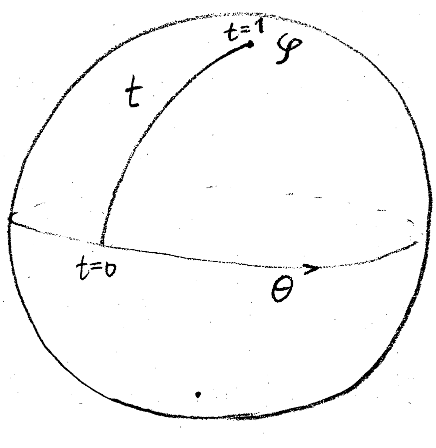
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{r}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{L}(S^n)$ を ($\mathfrak{r}^{n-1}$はT^{n-1}のリイ環)

$$\sigma_{n+1}(a) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\rho_2(a)\,Y + \tilde{\rho}_2(a), \quad a \in \mathfrak{sl}(2R)$$

$$\sigma_{n+1}(t_i) = f_i(\varphi)\,Y, \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$$

$\{t_i\}$は $\mathfrak{r}^{n-1}$ の基底,

により定義すると, 上の(イ)(ロ)(ハ)に注意するとσ_{n+1}はリイ環の準同型になる。 $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\sigma_{n+1}(a) = \tilde{\rho}_2(a)$ で, aが生成するR^1作用は周期的となり, σ_{n+1}は$SL(2R) \times R^{n-1}$のS^nへの作用を定めることがわかる。



$H = \{ z = x+iy \mid y>0 \}$ を Poincaré 上半平面とし、H を写像 $x+iy \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$ によって $SL(2;R)$ に埋めこんでおく。

$H \times R^{n-1}$ の元 (z, u) は上の埋めこみと、$SL(2;R) \times \mathbb{R}^{n-1}$ の S^n への作用によって $\mathrm{Diff}(S^n)$ の元に対応する。それを $\overline{\varphi}(z, u)$ と表わしておこう。

$H \times \mathbb{R}^{n-1} \times S^n \longrightarrow H \times \mathbb{R}^{n-1}$ なる自明な bundle に cross-section の族によって葉を次のように定義する。

$H \times \mathbb{R}^{n-1}$ の点 $(i, 0)$ 上で点 $w \in S^n$ を通る葉 L_w を

$$L_w = \{ (z, u, \overline{\varphi}(z,u)(w)) \mid (z, u) \in H \times \mathbb{R}^{n-1} \}$$

によって定める。

$SL(2;R) \times \mathbb{R}^{n-1}$ は σ_{n+1} によって S^n に作用し、また一方では $H \times \mathbb{R}^{n-1}$ にも作用するが、その作用は上の葉層構造の葉を葉に移す。従って部分群 $\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$ の作用で $H \times \mathbb{R}^{n-1} \times S^n$ を割ってコンパクトな多様体 $H \times \mathbb{R}^{n-1} \underset{\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}}{\times} S^n$ 上の葉層構造を得ることができる。(Γ は $SL(2;R)$ の totally disconnected subgroup で $H/\Gamma = \Sigma$ (コンパクトな曲面となるものをとる)。

4頁の補題に従って、Godbillon-Vey 特性数を計算する。(実は補題は構造群が $O(n)$ に reduce する foliated bundle にも適用される。このときは写像 m が、$\mathcal{L}(M)$ への写像と

してはwell-defined ではないが、βの形から、積分は定まり、Godbillon-Vey特性数に一致する)。

Foliated product $H \times R^{n-1} \times S^n$ に対して

$(x, y, u_1, \cdots, u_{n-1}) \in H \times R^{n-1}$ をbase spaceの局所座標とし $m(\frac{\partial}{\partial x})$, $m(\frac{\partial}{\partial y})$, $m(\frac{\partial}{\partial u_i})$ $(i=1, \cdots, n-1)$ を計算すると、葉層構造の構成からそれぞれ $(0, i, 0 0 \cdots 0)$上では $\sigma_{n+1}(a_2)$, $\sigma_{n+1}(a_3)$, $\left(a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ および $\sigma_{n+1}(t_i)$ に等しくなる。一般の $(z, u) = (x, y, u_1 \cdots u_{n-1})$ 上ではこれらは $\overline{\varphi}(z, u)$ で写したものになる。

$(0, i, 0 \cdots 0)$ 上で $\beta(m(\frac{\partial}{\partial x}), m(\frac{\partial}{\partial y})\ m(\frac{\partial}{\partial u_1}), \cdots, m(\frac{\partial}{\partial u_{n-1}}))$ は $\beta(\sigma_{n+1}(a_2), \sigma_{n+1}(a_3), \sigma_{n+1}(t_1), \cdots, \sigma(t_{n-1}))$ で $\operatorname{div} Y = 0$ (near S^1) $\operatorname{div} Y = 2$ (S^{n-2}上で) などに注意すると、これは3つの積分の積

$$\left(\int_t (1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{div} Y)^2 (\operatorname{div} Y)^{n-2} d(\operatorname{div} Y)\right) \cdot \left(\int_\theta \operatorname{div} \sigma(a_2)\, d \operatorname{div}(a_3)\right)$$

$$\cdot \left(\int_\varphi \sum_i f_i\, df_1 \wedge \cdots \wedge \check{df_i} \wedge \cdots \wedge df_{n-1}\right)$$ に書けることがわかる。$\overline{\varphi}(z\, u)$ での上の積分の変化を考えると、結局 gv は

$$gv = \int_N (\text{上の積分の値})\, dN \quad (dN \text{は} N \text{の volume form})$$ の

形に書けることが確められて、f_iを動かすことによって、

gv が任意の実数値を取ることが示される。

それを確めるには、上の三つの積分の第1番と第2番目が実際に0でないこと、および第3の積分が、写像 $S^{n-2} \longrightarrow R^{n-1}$ $\varphi \longmapsto (f_1(\varphi), \cdots, f_{n-1}(\varphi))$ による像の囲む領域の体積に等しいことに注意すればよい。

（$H \times R^{n-1}$ は $H \times \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$ の被覆であるから局所的な記述はすべて $H \times \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma \times \mathbb{Z}^{n-1}$ のそれと考えてよい）。）

参考文献

[1] Godbillon-Vey; Un invariant des feuilletages de codimension 1. C.R. Acad. Sci. Paris (273)(1971).

[2] W. Thurston, Noncobordant foliation of S^3, Bull of A.M.S, 78 (1972) 511-514.