数理解析研究所講究録
第 286 巻 1977 年 113-121

Foliated bundlesの接続について

北大 理学部　鈴木 治夫

1. Foliated principal GL_r-bundlesにおける，transverse projectable connectionsの構成と，それによって定まる２次特性コホモロジー類の，一つの性質について考察する．

"微分可能"はC^∞をいみするものとし，微分可能多様体はすべてパラコンパクト，ハウスドルフであると仮定しておく．
$\mathfrak{F}$をn次元微分可能多様体Mの上の，codimension q のfoliationとする．$T(M)$をMの接ベクトル・バンドル，$F \subset T(M)$を，$\mathfrak{F}$のleavesに接するベクトルから成る，部分ベクトル・バンドルとする．Foliation $\mathfrak{F}$をもつ多様体Mを$(M, \mathfrak{F})$とかき，$E(M, p, GL_r)$を$(M, \mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundleとする．
Mはパラコンパクトだから，$E(M, p, GL_r)$の上にリーマン接続が存在する．とくに，剰余ベクトル・バンドル$V_T = T(M)/F$のBott接続[1]により，V_Tのframe bundle $E(V_T)$は，$(M, \mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundle ($q=r$)となる．これを$E_T(M, p_T, GL_q)$

とかく。 Bott 接続は，その transverse connection となる [2].
M_1 を微分可能多様体，$f: M_1 \to M$ を $\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$\mathcal{F}_1 := f^*\mathcal{F}$ を，f によって $\mathcal{F}$ から誘導される，M_1 の上の codimension q foliation とする。 f による $E(M,p,GL_r)$ の誘導バンドルを $f^*E(M,p,GL_r)$ とし，f に対応する principal bundle map を $\bar{f}: f^*E(M,p,GL_r) \to E(M,p,GL_r)$ とかく。 $f^*E(M,p,GL_r)$ は，$(M_1,\mathcal{F}_1)$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M_1,p_1,GL_r)$ となることが容易にわかる。

$WO_{q,r}$ を differential algebra: $R[c_1,c_2,\dots,c_s]/(\deg>q)\otimes\Lambda(h_1,h_3,\dots,h_l)$，(R は実数体)，$s:=\min(q,r)$，$l:=\max\{2i+1\leqq r\}$，$d(c_i)=0$，$d(h_j)=c_j$ $(j\leqq s)$，$q<l$ の場合，$d(h_j)=0$ $(j>s)$ とする。 M 上の複素数係数の微分形式環を $A^*_C(M)$ とかく。 M 上の principal GL_r-bundle E の接続 θ の曲率形式に対し，GL_r の Lie 環 gl_r の，次数が q より大きい任意の不変多項式の値が，0 となるならば，θ とリーマン接続 θ^0 とのアファイン結合を用いることにより，一般化された Bott の differential algebra map，$\lambda_{q,r}(\theta): WO_{q,r} \to A^*_C(M)$ が構成され，コホモロジー準同形，$\Delta_{q,r}(\theta): H^*(WO_{q,r}) \to H^*_{DR}(M;C)$ (H_{DR} は de Rham コホモロジー，C は複素数体）が得られる。 E が $(M,\mathcal{F})$ 上の foliated principal bundle $E(M,p,GL_r)$ で，θ がその transverse connection ならば，$\Delta_{q,r}(\theta)$ は，θ のとり方によらずに定まる。([1],[2] 参照)。 これは，$(M,\mathcal{F})$ の $E(M,p,GL_r)$ の

特性準同形とよばれるものである。 とくに，$WO_q := WO_{q,q}$ とおき，$E=E_T(M, p_T, GL_r)$ にとるとき，$\Delta_{q;r}(\theta)$ は，Bott の特性準同形 $\Delta_q(\mathcal{F}) : H^*(WO_q) \to H^*_{DR}(M; C)$ となる。 WO_q のコサイクルを γ とかく。

M を $q=2r+1$ 次元微分可能多様体，$\mathcal{F}$ を M の上の codimension r の foliation とし，$\mathcal{F}(f)$ を submersion $f : M_1 \to M$ による，M_1 の foliation とする。

定理　$\mathcal{F}$ が non-trivial な Bott の q 次元 2 次特性コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0$ をもち，$f^* : H^q(M; R) \to H^q(M_1; R)$ が injective ならば，$(M_1, \mathcal{F}(f))$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_0(M, p, GL_r) := f^*E(\nu_{\mathcal{F}})$ において，transverse projectable connections ω^0 および ω が存在し，γ に対する 2 次特性コホモロジー類が，それぞれ $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma] = 0$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma] \neq 0$，$([\frac{q}{2}] = r)$ となる。

$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma]$ として，例えば，Godbillon-Vey コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[c_1^r h_1]$ をとることができ，submersion f として，M のベクトル・バンドルの射影写像をとることができる。

2.　一般に，$\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$f : M_1 \to M$ による誘導バンドル，$f^*E(M, p, GL_r) = E(M_1, p_1, GL_r)$ において，次の補題が成立つ。

補題 2，1，　θ，θ^0 および ω を，それぞれ，$(M, \mathcal{F})$ の上

の $E(M,p,GL_r)$ の transverse, リーマンおよび transverse projectable connection [2] とするとき, $\bar{f}^*\theta$, $\bar{f}^*\theta^0$ および $\bar{f}^*\omega$ は, それぞれ $(M_1,\mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1,p_1,GL_r)$ の transverse, リーマンおよび transverse projectable connection となる.

証明　$\mathcal{F}_E$ を, $\mathcal{F}$ の $E(M,p,GL_r)$ におけるリフトとし, F_E を $\mathcal{F}_E$ の leaves の接ベクトルから成る, $T(E(M,p,GL_r))$ の部分ベクトル・バンドルとする. $\mathcal{F}_{1,E}:=\bar{f}^*\mathcal{F}_E$ は, $E(M_1,p_1,GL_r)$ における $\mathcal{F}_1$ のリフトであり, 対応する部分ベクトル・バンドルを $F_{1,E}$ とかく. $e\in E(M_1,p_1,GL_r)$ に対し, $X\in F_{1,E}|_e$ ならば, $\bar{f}_*X\in F_E|_{\bar{f}(e)}$ だから, $\bar{f}^*\theta(X)=\theta(\bar{f}_*X)=0$ となる. これは, $\bar{f}^*\theta$ が transverse connection であることを示している. V を $E(M,p,GL_r)$ に対応するベクトル・バンドル, v_i を V の局所基底ベクトル場とし, w_i を v_i に対応する f^*V の局所ベクトル場 $(w_i(y)=(v_i(f(y)),y),\ y\in M_1)$, $i=1,2,\cdots,r$ とする. θ^0 に対応する V の接続を ∇^0 とするとき, M_1 の局所接ベクトル場 Y に対して,

$$
\begin{aligned}
(f^*\nabla^0)_Y\langle w_i,w_j\rangle(y) &= \nabla^0_{f_*Y(y)}\langle v_i,v_j\rangle(y)\\
&=\langle(\nabla^0_{f_*Y(y)}v_i,y),(v_j(f(y)),y)\rangle+\langle(v_i(f(y)),y),(\nabla^0_{f_*Y(y)}v_j,y)\rangle\\
&=\langle(f^*\nabla^0)_Y w_i,w_j\rangle(y)+\langle w_i,(f^*\nabla^0)_Y w_j\rangle(y).
\end{aligned}
$$

この関係式は, 接続の条件の下で保存されるから, f^*V の任意のベクトル場 s_1, s_2 に対して拡げられる. E の任意の局所 section s と, これに対応する f^*E の局所 section s' をとれば,

$s^*(\bar{f}^*\theta^0) = f^* s^* \theta^0$ となり，したがって $\bar{f}^*\theta^0$ は，f^*V のリーマン接続に対応するから，$E(M_1, p_1, GL_r)$ のリーマン接続となる。

N を，$\mathcal{F}$ に transverse な，M の q 次元局所部分多様体とし，N の上への $\mathcal{F}$ の局所 submersion を h とする。 h は $E(M, p, GL_r)$ の局所積構造の開集合 $U \subset M$ の上で定義されるとしてよい。必要ならば，N をさらに小さくとり，M_1 の中に微分可能 q 次元局所部分多様体 N_1 を見出し，f によって，N の上に微分位相同形に写されるようにすることができる。 このとき，M_1 の開集合 $U_1 \subset f^{-1}(U)$ が存在し，$h_1 := (f|N_1)^{-1} \cdot h \cdot f|U_1 : U_1 \to N_1$ は，U_1 における $\mathcal{F}_1$ の局所 submersion となるようにできる。 あきらかに，$h \cdot f|U_1 = f \cdot h_1$． $E(M, p, GL_r)|U \cong h^*E(M, p, GL_r)|N$，$E(M_1, p_1, GL_r)|U_1 \cong h_1^*E(M_1, p_1, GL_r)|N_1$ だから，h および h_1 の covering principal bundle maps，$\bar{h} : E(M, p, GL_r)|U \to E(M, p, GL_r)|N$ および $\bar{h}_1 : E(M_1, p_1, GL_r)|U_1 \to E(M_1, p_1, GL_r)|N_1$ をえらべば，$\bar{h} \cdot \bar{f}|(E(M_1, p_1, GL_r)|U_1) = \bar{f} \cdot \bar{h}_1$ とできる。 $E(U) := E(M, p, GL_r)|U$，$E(U_1) := E(M_1, p_1, GL_r)|U_1$ 等とかくことにする。

$\omega|E(U) = \bar{h}^*(\omega|E(N))$ だから，

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^*\omega|_{E(U_1)} &= (\bar{f}|_{E(U_1)})^*(\omega|_{E(U)}) \\
&= (\bar{f}|_{E(U_1)})^* \cdot \bar{h}^*(\omega|_{E(N)}) \\
&= (\bar{h} \cdot \bar{f}|_{E(U_1)})^*(\omega|_{E(N)}) \\
&= (\bar{f} \cdot \bar{h}_1)^*(\omega|_{E(N)}) \\
&= \bar{h}_1^*(\bar{f}^*\omega|_{E(N)})
\end{aligned}
$$

となる。したがって，$\bar{f}^{*}\omega$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の，transverse projectable connection である。　証明終

$\mathfrak{gl}_r$ の不変多項式環を $I(\mathfrak{gl}_r)$ とかく。実数体上の $r\times r$ 行列 A に対し，不変多項式 c_i を，$\det(I+tA)=1+\sum_{i=1}^{r} t^i c_i(A)$ (t は不定元) と定めるとき，$I(\mathfrak{gl}_r)=R[c_1, c_2, \cdots, c_r]$ となることはよく知られている。$\pi: M\times R\to M$，$\bar{\pi}: E(M, p, GL_r)\times R\to E(M, p, GL_r)$ を自然な射影とする。$E(M, p, GL_r)$ の接続 θ およびリーマン接続 θ^0 に対し，$\bar{\theta}:=\bar{\pi}^{*}((1-t)\theta+t\theta^0)$ $(t\in R)$ とおく。$\bar{\theta}$ は $E(M, p, GL_r)\times R$ の接続となる。$\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta^0, \theta): I(\mathfrak{gl}_r)\to A_c^{*}(M)$ を，$\lambda(\theta):=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^i \varphi_i(\Omega)$ (φ_i は i 次元不変多項式，Ω は θ の曲率形式)，$\lambda(\theta^0, \theta)(\varphi_j):=\pi_{*}(\lambda(\bar{\theta})(\varphi_j)|M\times[0,1])$，$\pi_{*}$ は trivial bundle π の integration over the fibre と定める。

$d\{\lambda(\theta^0, \theta)(c_{2i-1})\}=\lambda(\theta)(c_{2i-1})$ $(1\leqq 2i-1\leqq r)$ が成立つ ([1], [2]) から，θ の曲率形式に対して，$I(\mathfrak{gl}_r)$ の k より大きい次数の，任意の多項式の値が 0 となるとき，differential map，$\lambda_{k,r}(\theta): WO_{k,r}\to A_c^{*}(M)$ が，$\lambda_{k,r}(\theta)(c_i):=\lambda(\theta)(c_i)$ $(1\leqq i\leqq \min(k,r))$，$\lambda_{k,r}(\theta)(h_j):=\lambda(\theta^0, \theta)(c_j)$ $(j=1, 3, \cdots, l)$ によって定まる。とくに，$(M, \mathcal{F})$ 上の $E(M, p, GL_r)$ の transverse connection θ に対して，Bott の vanishing theorem により，$\lambda_{q,r}(\theta)$ が定まる。補題 2.1 により，$\bar{f}^{*}\theta$ は $(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse connection となるから，同様に $\lambda_{q,r}(\bar{f}^{*}\theta)$ が定まる。

補題 2.2.　$\lambda_{q,r}(\bar{f}^{*}\theta)(c_i)=f^{*}(\lambda_{q,r}(\theta)(c_i))$　$1\leqq i\leqq s$,

$$\lambda_{q,r}(\bar{f}^{*}\theta)(h_j)=f^{*}(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j))\quad j=1, 3, \cdots, l.$$

証明 オ1式は，直接の計算により容易に示される．補題2.1により，$f^*\theta^0$がリーマン接続であることを注意する．$\pi_1: M_1 \times R \to M_1$を自然射影とするとき，Integration over the fibre の naturality [3, VII §5 PROP. VIII]により，

$$\begin{aligned}\lambda_{q,r}(f^*\theta)(h_j) &= \lambda(f^*\theta^0, f^*\theta)(c_j) \\ &= \pi_{1*}(\lambda((f\times id)^*\bar{\theta})(c_j)|M_1\times[0,1]) \\ &= \pi_{1*}((\tfrac{-1}{2\pi})^j c_j((f\times id)^*\Omega(\bar{\theta}))|M_1\times[0,1]) \\ &= f^*\cdot\pi_*((\tfrac{-1}{2\pi})^j c_j(\Omega(\bar{\theta}))|M\times[0,1]) \\ &= f^*(\lambda(\theta^0,\theta)(c_j)) \\ &= f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j)),\end{aligned}$$

となるから，オ2式が得られる．証明終

3. 定理の証明． θを$(M, \mathcal{F})$上の$E_T(M, p_T, GL_r)$の，transverse connection とする．$f^*E_T(M, p, GL_r)$は，$(M_1, \mathcal{F}_1) = (M_1, f^*\mathcal{F})$の上の foliated principal GL_r-bundle で，$E_T(M_1, p_1, GL_r)$と一致する．定理の仮定と補題2.2により，

$$[\lambda_{r,r}(f^*\theta)(\gamma)] = [f_*(\lambda_{r,r}(\theta)(\gamma))] = f_*\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0.$$

$f^*E(\nu_{\mathcal{F}})$において，codimension q foliation $\mathcal{F}(f)$のリフトとして，submersion $\bar{f}: f^*E(\nu_{\mathcal{F}}) \to E(\nu_{\mathcal{F}})$による foliation をとることにより，$f^*E(\nu_{\mathcal{F}})$は，$(M, \mathcal{F}(f))$の上の foliated principal GL_r-bundle $E_0(M_1, p_1, GL_r)$となる．$E_T(M, p_T, GL_r)$の上のリーマン接続θ^0，$\mathcal{F}$の transverse connection θ

をとり，$\omega^0 := \bar{f}^*\theta^0$，$\omega := \bar{f}^*\theta$ とおく．　ω^0，ω は共に，$(M_1, \mathcal{F}(f))$ の上の $E_0(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse projectable connections で，Bott の strong vanishing theorem が成立つから，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)$ が定まる．　補題2.1 によって，ω^0 はリーマン接続だから，$\lambda_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)(h_j) = 0$ となり，したがって，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma] = 0$ となる．

$$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega) = [\lambda_{r,r}(\omega)(\gamma)] \neq 0.$$

証明終

$\mathcal{F}$ を M の上の codimension q foliation とする．　$(M, \mathcal{F})$ 上の，foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ における，transverse projectable connection ω に対し，$WO_{[\frac{q}{2}],r}$ のコサイクル，

$$\gamma = c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}$$

$$1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_\lambda \leqq s = \min([\tfrac{q}{2}], r),\quad 1 \leqq j_1 < \cdots < j_\mu \leqq l \ (j_\beta \text{ は奇数}),$$

をとるとき，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q+1$ ならば，対応する2次特性コホモロジー類，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma]$ は ω のとり方によらない（[2]）が，γ のコサイクルの条件 $2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q$ だけでは，例えば $\gamma = c_1^r h_1$ で，$q = 2r+1$ のとき，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma] = \Delta_{r,r}(\omega)[\gamma]$ が，ω のとり方によって異なることを，定理は示している．

文　献

[1]　R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag,

Berlin-New York, 1972, 1-76.

[2] H. Suzuki, Characteristic classes of foliated principal GL_r-bundles, Hokkaido Math. J. IV (1975), 159-168.

[3] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, Connections, curvature, and cohomology, Vol. I, Academic Press, 1972.