数理解析研究所講究録
第 287 巻 1977 年 70-87

Harmonic analysis on affine symmetric spaces

東大理　大島利雄
京大理　関口次郎

1　問題

Riemannian symmetric space 上の不変微分作用素の同時固有函数と，そのMartin 境界上の line bundle の hyperfunction sections の間には（generic には）Poisson 積分と境界値を取る操作とによって，1対1の対応がある．

ここでは，"Riemannian symmetric space をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時にその外側にあらわれる" 必ずしも Riemannian とは限らない symmetric space に対して，上に述べた命題の類似を考えることにする．

必ずしも Riemannian とは限らない symmetric space（それを affine symmetric space と呼ぶことにする）の分類は M.Berger [1] にある．　ここで考察の対象にするもの

は，そのうちの特殊なものである．もっと一般的に扱うことも可能だと思われるが，それについてはふれない．

特に断わらないで使う記号は大島[3]参照のこと．

2．岩沢分解

Gを connected real semisimple Lie group with finite center，Kをその maximal compact subgroup，それぞれの Lie algebraを $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ とする．$\mathfrak{k}$に関する$\mathfrak{g}$の Cartan involutionをθとする．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関する root systemを Σ で表わし，それに順序を入れておく．positive simple roots の集合を $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ とする．

次の条件をみたす写像 $\varepsilon : \Sigma \longrightarrow \{-1, 1\}$ を考える．

(i) $\varepsilon(\alpha_i) = \pm 1$ for $\alpha_i \in \Pi$

(ii) $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{\sum_{i=1}^{l} m_i}$ for $\alpha = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i \in \Sigma$

εに対して $\mathfrak{g}$ の involution θ_ε を

$$\theta_\varepsilon(X) = \varepsilon(\alpha)\theta(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{g}^\alpha,\ (\forall \alpha \in \Sigma)$$

$$\theta_\varepsilon(X) = \theta(X) \quad \text{for } X \in \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$$

で定義する．そして

$$\mathfrak{k}_\varepsilon = \{ X \in \mathfrak{g} \,;\, \theta_\varepsilon(X) = X \}$$

とおく．すると $\mathfrak{k}_\varepsilon$ は $\mathfrak{k}$ と複素化が同型である$\mathfrak{g}$の subalgebra になる． $\mathfrak{k}_\varepsilon$ から生成される G の analytic subgroup を K_ε^0，そして $K_\varepsilon = MK_\varepsilon^0$ とおく．さらに

$$M_\varepsilon^* = M^* \cap K_\varepsilon$$

$$W_\varepsilon = M_\varepsilon^*/M$$

とおき，$W_\varepsilon \backslash W$ の代表元を $w_1 = e, w_2, \cdots, w_r$ とする $(r = [W : W_\varepsilon$

<u>Lemma 1</u>（岩沢分解）

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ direct sum

2) $G \supset \bigcup_{i=1}^{r} K_\varepsilon m_{w_i} AN$ open dense, unique

以下では，affine symmetric space G/K_ε を考える． 1. で述べた "Riemannian symmetric space G/K をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時に，その外側にあらわれる" affine symmetric space は infinitesimal には上のような手続きで得られ，必ず G/K_ε の形にあらわせる．

3. G/K_ε の埋め込み

Riemannian symmetric space G/K の compact 化の1つの方法は大島 [3] にある．そこで定義された compact real analytic manifold の open G-orbit はすべて G/K

と同型である．　しかしその方法を少し修正すると，G/K と同型な open orbit から出発して closed orbit を越えて別の open orbit に移るとき　$\mathfrak{g}$ の Cartan involution θ がある ε に対する $\mathfrak{g}$ の別の involution θ_ε に変り，その open orbit は G/K_ε と同型になる．　したがって，$\varepsilon : \Sigma \to \{-1, 1\}$ の定義の仕方は 2^l 通りの可能性があるので，K/M と同型な最も次元の低い G-orbit の近傍の open G-orbit は，すべての可能な ε に対応する affine symmetric space G/K_ε が1つづつあらわれる．　これから open orbit がすべての可能な G/K_ε である K/M の近傍が，大島[3]の方法とほぼ同様に定義できる．　root system Σ が reduced の場合には，このような K/M の近傍のコピーを $\#W$ コつじつまがあうようにはり合せることができて，G が real analytic に作用する connected compact real analytic manifold が定義できる．　構成の仕方から　G/K，及び K/M と同型な G-orbit は $\#W$ コあらわれ，G/K_ε と同型な G-orbit は $\#W_\varepsilon$ コあり，その closure に含まれる K/M と同型は orbit は　$r = [W : W_\varepsilon]$ コある．　Σ が non reduced の場合には，そのままでは連結でないのでその連結成分を考えればよい．　ここで述べた G/K 及び G/K_ε の compact 化は佐武の compact 化と関係があることに注意しておく（cf [4]）

簡単な場合に open orbit としてどのような homog. space が表われるかを例示しておこう．

<u>例 1</u> $G = SL(2;\mathbb{R})$ root 系 A_1

$\Sigma = \{\alpha, -\alpha\}$ を root 系とする．

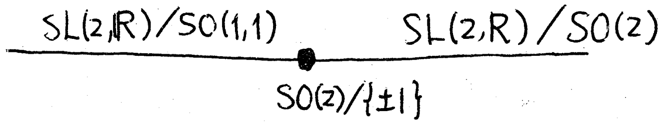
$\varepsilon(\alpha) = 1$ のとき $G/K_\varepsilon = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$．

$\varepsilon(\alpha) = -1$ のとき 簡単な計算により

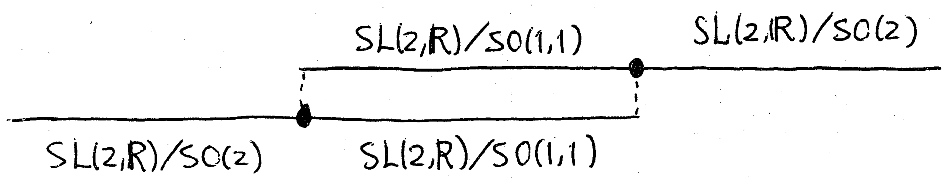
$G/K_\varepsilon = SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$ がわかる．

abelian part A の "compact 化" を図示しよう．

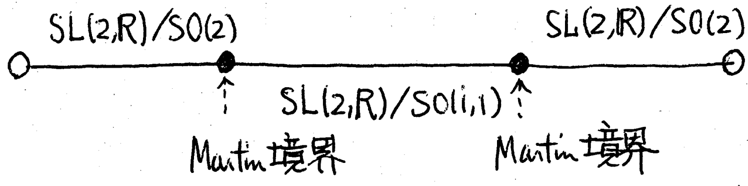
Martin 境界の近傍として



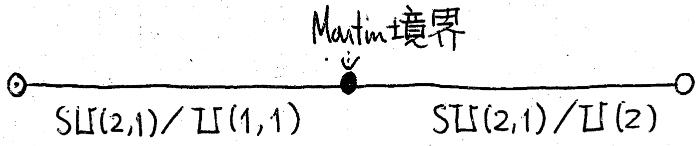
が得られる． これの2つのコピーを下のようにはり合せる．



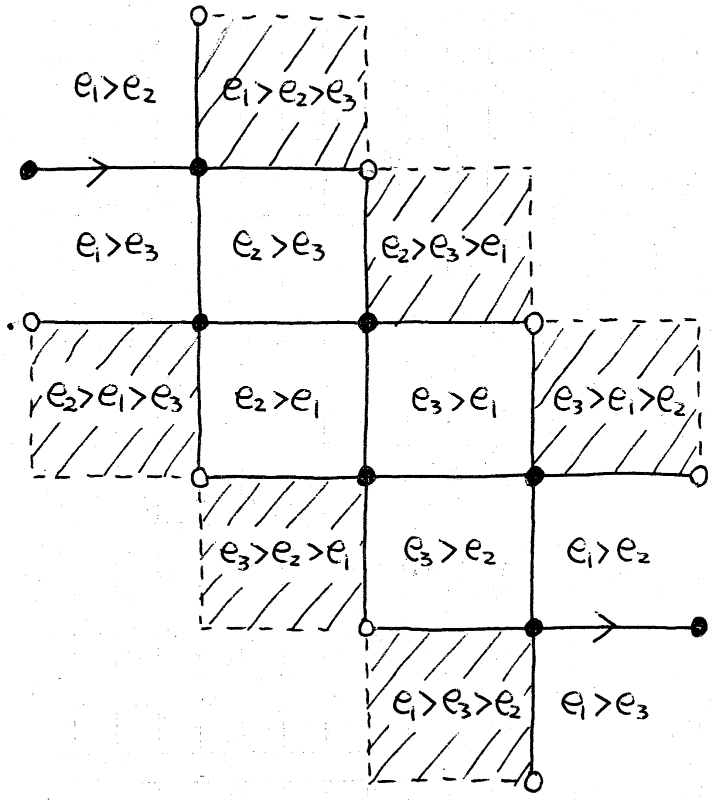
得られた結果を下の図のように表わす．



例 2. $G = SU(2,1)$ root系 BC_1



例 3. $G = SL(3,\mathbb{R})$ root系 A_2



斜線部 $\cong SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$

$\{e_i > e_j\}$ の部分

$\cong SL(3,\mathbb{R})/SO(2,1)$

● Martin境界

(余次元 = 2)

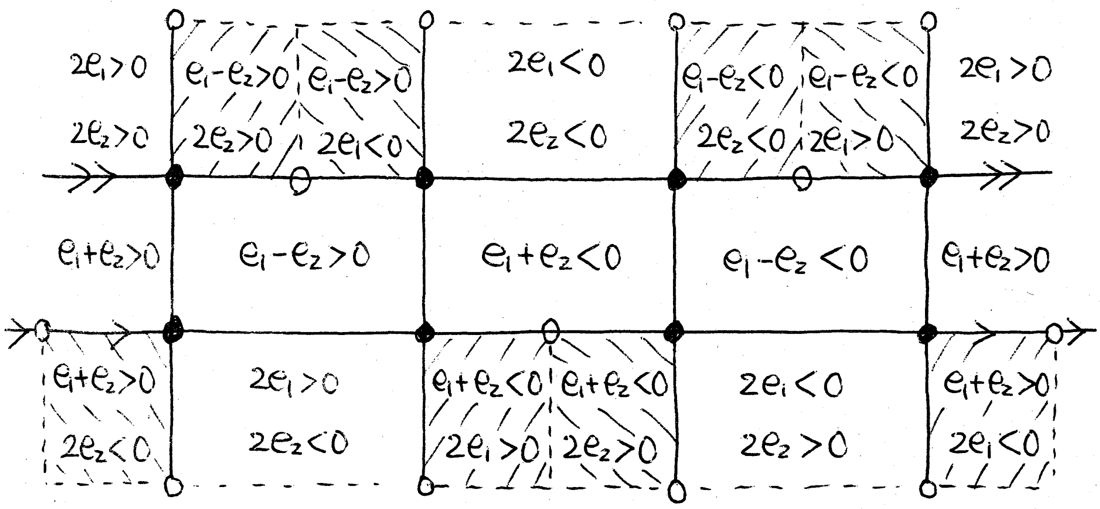
例 4. $G = Sp(2,\mathbb{R})$

斜線部 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$

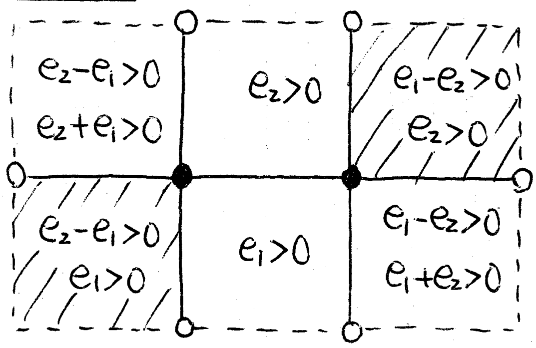
$\{e_1+e_2>0\}$ $\{e_1-e_2>0\}$ $\{e_1+e_2<0\}$ $\{e_1-e_2<0\}$

などの部分 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{R})$

$\{2e_1>0,\ 2e_2>0\}$ などの部分 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/U(1,1)$



例 5 $G = SU(3,2)$ root 系 BC_2



$\{e_1-e_2>0,\ e_2>0\},\ \{e_2-e_1>0,\ e_1>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(3)\times U(2))$

$\{e_1\pm e_2>0\},\ \{e_2\pm e_1>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(2)\times U(1,2))$

$\{e_1>0\},\ \{e_2>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(2,1)\times U(1,1))$

Remark: 上で個々の図のワクの不等式は Riemannian (あるいは affine) symmetric space の Weyl chamber を表わしている. affine symmetric pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ に対して W_ε に関する $\mathfrak{a}$ の基本領域 $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$ をひとつ固定すれば, $A_\varepsilon^+ = \exp \mathfrak{a}_\varepsilon^+$ として, $G/K_\varepsilon \cong K\overline{A_\varepsilon^+}K_\varepsilon/K_\varepsilon$ となる. $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$ は上の例ではそれぞれの不等式で定義できるのである.

4. Poisson変換

$\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$を G/K_ε上の~~左G~~-不変微分作用素環とする.

<u>Lemma 2.</u> $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \cong \mathbb{D}(G/K)$

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda(\log a)} & \text{if } g = k_\varepsilon m_{w_i} a n \in K_\varepsilon m_{w_i} AN \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon m_{w_i} AN \end{cases}$$

で $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$を定義する.

<u>Lemma 3.</u> $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$は $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$に関して有理的な G上の hyperfunction になる.

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho) H_\varepsilon^i(g^{-1}k)} dk$$

とおくと, $\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i$ は K に関して左, K_εに関して右不変な G上の函数である. $\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i$を G/K_ε 上の函数とみたとき, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ の同時固有函数になる.

さて, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ から $\mathbb{C}$への algebra hom. χ に対して

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi)) = \{u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon);\ Du = \chi(D)u \text{ for } \forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon)\}$$

とおく. すると

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}^{i} \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \qquad i=1,\cdots,r$$

となるような $\chi=\chi_\lambda$ が unique に定まる．さらに
$\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{i}(g) = e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(g^{-1})}$ とおけば

$$\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{i} \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon , \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \qquad i=1,\cdots,r$$

もわかる．

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon} = (\varphi_{\lambda,\varepsilon}^{1}, \cdots, \varphi_{\lambda,\varepsilon}^{r})$$
$$\Psi_{\lambda,\varepsilon} = (\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{1}, \cdots, \Psi_{\lambda,\varepsilon}^{r})$$

として vector 表示する．

<u>Def. 4</u>

$$\mathcal{P}_\lambda : \bigoplus_r \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$
$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K \left(\pi(k)\Psi_{\lambda,\varepsilon}\right)(g)\, f(k)\, dk$$

を Poisson 変換とよぶことにする．ただし

$$(\pi(k)\Psi_{\lambda,\varepsilon})(g) = (\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{1}(k^{-1}g), \cdots, \Psi_{\lambda,\varepsilon}^{r}(k^{-1}g))$$
$$f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_r(k) \end{bmatrix} \qquad f_i \in \mathcal{B}(K/M) \quad i=1,\cdots,r$$

とおいた．

簡単な計算により

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K \Psi_{\lambda,\varepsilon}(k)\, f(gk)\, dk$$

と書き直せる．（ $f(gk) := f(\kappa(gk))\, e^{(\lambda-\rho)H(gk)}$ とおいた.）

5. 帯球函数

Def. 5.

$\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda)) = \{u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))\,;\, f(kg)=f(g), {}^\forall k \in K\}$

の元を (K, K_ε)–不変帯球函数と呼ぶことにする。

($\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元で左 K– 不変であれば，必然的に real analytic になることに注意しておく。)

Lemma 6. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda)) = r$

であり，その basis として $\{\varphi^1_{\lambda,\varepsilon}, \cdots, \varphi^r_{\lambda,\varepsilon}\}$ をとれる。

Lemma 7. (函数等式)

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon} = \varphi_{w\lambda,\varepsilon}\, A_w(\lambda) \qquad \text{for } {}^\forall w \in W$$

ここで $A_w(\lambda)$ は $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ の meromorphic function を成分とする $r \times r$ 行列で，さらに

$$A_{w_1 w_2}(\lambda) = A_{w_1}(w_2\lambda)\, A_{w_2}(\lambda) \qquad w_1, w_2 \in W$$

が成立つ。

$A_w(\lambda)$ の各成分は $\{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}\,;\, \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \notin \mathbb{Z} \text{ for } {}^\forall\alpha \in \Sigma\}$ で正則である。 Gindikin – Karpelevič – Helgason – Schiffmann の方法によって，w が simple root に関する鏡映の場合には，$A_w(\lambda)$ の各成分を計算できる。

例1　$G=SL(2;\mathbb{R})$, $K_\varepsilon = SO(1,1)$, $N=\left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ & 1\end{bmatrix}\right\}$ のとき
$W=\mathfrak{S}_2$, $W_\varepsilon=\{e\}$　$w=(1,2)\in\mathfrak{S}_2$ とおくと $W_\varepsilon\backslash W$
の代表元として e, w をとれる. (K,K_ε)-帯球函数は第2種の Legendre の函数で表わせる.

$\mu=\frac{\pi}{2}(\lambda_2-\lambda_1)$ for $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とおくと

$$A_e(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix},\quad A_w(\lambda)=\begin{bmatrix}\sec\mu & \tan\mu\\ \tan\mu & \sec\mu\end{bmatrix}$$

例2　$G=SL(3;\mathbb{R})$, $K_\varepsilon=SO(2,1)=\left\{g\in G\,;\,{}^tg\begin{pmatrix}1_2 & \\ & -1\end{pmatrix}g=\begin{pmatrix}1_2 & \\ & -1\end{pmatrix}\right\}$
$N^+=\left\{\begin{bmatrix}1 & * & *\\ & 1 & *\\ & & 1\end{bmatrix}\right\}$ のとき
$W=\mathfrak{S}_3$, $s_1=(1,2)$, $s_2=(2,3)\in\mathfrak{S}_3$ とおくと
$W_\varepsilon=\{e,s_1\}\cong\mathfrak{S}_2$.　$W_\varepsilon\backslash W$ の代表元として
$w_1=e$, $w_2=s_2$, $w_3=s_2s_1$ をえらぶ.
$\mu_1=\frac{\pi}{2}(\lambda_2-\lambda_1)$　$\mu_2=\frac{\pi}{2}(\lambda_3-\lambda_2)$　$\mu_3=\frac{\pi}{2}(\lambda_3-\lambda_1)$
$(\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ とおくと

$$A_e(\lambda)=I_3\quad A_{s_1}(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \sec\mu_1 & \tan\mu_1\\ & \tan\mu_1 & \sec\mu_1\end{bmatrix},\ A_{s_2}(\lambda)=\begin{bmatrix}\sec\mu_2 & \tan\mu_2 & \\ \tan\mu_2 & \sec\mu_2 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{s_1s_2}(\lambda)=A_{s_1}(s_2\lambda)A_{s_2}(\lambda).\quad A_{s_2s_1}(\lambda)=A_{s_2}(s_1\lambda)A_{s_1}(\lambda)$$

$$A_{s_1s_2s_1}(\lambda)=A_{s_1}(s_2s_1\lambda)A_{s_2s_1}(\lambda).$$

例3　$G=Sp(2;\mathbb{R})=\left\{g\in SL(4;\mathbb{R})\,;\,{}^tg\begin{bmatrix} & -1_2\\ 1_2 & \end{bmatrix}g=\begin{bmatrix} & -1_2\\ 1_2 & \end{bmatrix}\right\}$
$K_\varepsilon=\left\{g\in G,\ {}^tg\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}g=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}\right\}\cong U(1,1)$
$N^+=\left\{\begin{bmatrix}1 & * & * & *\\ & 1 & * & *\\ & & 1 & \\ & & * & 1\end{bmatrix}\right\}$ のとき.

$W=\mathfrak{S}_2^{\pm}$. (e_1,e_2) を 直交基底とするとき

$$s_1:(e_1,e_2)\to(e_2,e_1) \qquad s_2:(e_1,e_2)\to(e_1,-e_2)$$

で s_1,s_2を定義すると Wは s_1,s_2 で生成される.

$W_\varepsilon=\{e,s_2,s_1s_2s_1,(s_1s_2)^2\}$となる. $W_\varepsilon\backslash W$ の代表元として $w_1=e$, $w_2=s_1$をとる. さらに $\mu_1=\frac{\pi}{2}(\lambda_2-\lambda_1)$

$\mu_2=\frac{\pi}{2}(\lambda_2+\lambda_1)$ for $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とおくと

$$A_e(\lambda)=A_{s_2}(\lambda)=1_2 \qquad A_{s_1}(\lambda)=\begin{bmatrix}\tan\mu_1 & \sec\mu_1\\ \sec\mu_1 & \tan\mu_1\end{bmatrix}$$

他は $A_{w_1w_2}(\lambda)=A_{w_1}(w_2\lambda)A_{w_2}(\lambda)$ を使えば求まる.

<u>例3 bis.</u> $K_\varepsilon=\{g\in G\,;\,{}^tg\begin{bmatrix}1_2 & \\ & -1_2\end{bmatrix}g=\begin{bmatrix}1_2 & \\ & -1_2\end{bmatrix}\}\cong GL(2;\mathbb{R})$ のとき. $W_\varepsilon=\{e,s_1\}$となる. $W_\varepsilon\backslash W$の代表元として $w_1=e$, $w_2=s_2$, $w_3=s_2s_1$, $w_4=s_2s_1s_2$ をとる.

$$A_e(\lambda)=1_4$$

$$A_{s_1}(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \sec\mu_1 & \tan\mu_1 & \\ & \tan\mu_1 & \sec\mu_1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{s_2}(\lambda)=\begin{bmatrix}\sec2(\mu_1+\mu_2) & -\tan2(\mu_1+\mu_2) & & \\ -\tan2(\mu_1+\mu_2) & \sec2(\mu_1+\mu_2) & & \\ & & \sec2(\mu_1+\mu_2) & -\tan2(\mu_1+\mu_2)\\ & & -\tan2(\mu_1+\mu_2) & \sec2(\mu_1+\mu_2)\end{bmatrix}$$

6. 境界値

以下ではK_εを固定してG/K_εを考えることにする。3.で述べたようにG/K_εをcompact多様体に埋め込んだ時に、そのclosureにはK/Mと同型なhomog. spaceが$r=[W:W_\varepsilon]$コあらわれた。それらを$B_1,\cdots,B_r$で表わしG/K_εのMartin境界と呼ぶことにする。

<u>Lemma 8.</u> 微分方程式系

$$\mathfrak{M}(\chi_\lambda):\ Du=\chi_\lambda(D)u \qquad \text{for } \forall D\in\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$$

は各Martin境界をedgeとするそのまわりのカベに沿って確定特異点型である。(注) さらにその決定方程式の根は

$$\left(-\tfrac{1}{2}(w\lambda-\rho)(H_1),\ \cdots,\ -\tfrac{1}{2}(w\lambda-\rho)(H_l)\right)$$

$$\lambda(w)=\cancel{(-w\lambda(H_1),\ \cdots,\ -w\lambda(H_l))} \qquad w\in W$$

である。（cf. [2] [3]）

$u\in\mathcal{B}(G/K_\varepsilon\,;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$に対してMartin境界$B_i$への決定方程式の根$\lambda(w)$に対応する境界値を$\beta^i_{w\lambda}u$であらわす。すると$\mathcal{B}(B_i)\cong\mathcal{B}(K/M)$の同一視でG-hom.

$$\beta_{w\lambda}:\mathcal{B}(G/K_\varepsilon\,;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))\longrightarrow\bigoplus^{r}\mathcal{B}(K/M)$$

$$\beta_{w\lambda}u=\begin{bmatrix}\beta^1_{w\lambda}u\\ \vdots\\ \beta^r_{w\lambda}u\end{bmatrix}$$

(注) この埋め込みでは、正確には弱い意味で確定特異点型である。しかし簡単な座標変換でこのようにできる。

を定義できる．$B_1,\cdots,B_r$ のそえ字を適当に並べ変えて

$$c_{ji}(\lambda)=\beta_\lambda^j\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i=\int_{\bar N}e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(\bar w_j\bar n)}d\bar n$$

となるようにする．このとき Bruhat の理論により Poisson 核の境界値がわかり

$$\beta_\lambda^j\Phi_{\lambda,\varepsilon}^i=c_{ji}(\lambda)\delta(k)$$

となる．$\delta(k)$ は K/M 上のデルタ函数である．$c_{ji}(\lambda)$は $c(\lambda)=\int_{\bar N}e^{-(\lambda+\rho)H(\bar n)}d\bar n$ と (K,K_ε)-不変帯球函数の函数等式（Lemma 7）にあらわれた行列 $A_w(\lambda)$ であらわせる．実際

$$\beta_\lambda\varphi_{\lambda,\varepsilon}=c(\lambda)E_\sigma A_{w^*}(\lambda)$$

がわかる．ここで E_σ は次のように定義される．$\{W_\varepsilon w_1,\cdots,W_\varepsilon w_r\}=\{W_\varepsilon w_1w^*,\cdots,W_\varepsilon w_rw^*\}$ であるが $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ を $W_\varepsilon w_i=W_\varepsilon w_{\sigma(i)}w^*$ となるようにえらぶとき $E_\sigma\in SL(r,\mathbb{R})$ は

$$E_\sigma\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ a_{\sigma(r)}\end{bmatrix}\qquad \text{for }\forall a_1,\cdots,a_r$$

となる行列である．

7．同時固有函数の積分表示

はじめに Riemannian symmetric space G/K に対する 1．で述べた結果を書いておこう．$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して条件

$$(*)\qquad \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\notin\mathbb{Z}\qquad \text{for }\forall\alpha\in\Sigma$$

を仮定する（この条件はさらに弱めることもできるが元のままにしておく）．

Thm ([2]) Poisson変換

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K\,;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} f(k)\,dk$$

は, 条件(*)のもとで onto G-isomorphism である.

この結果は affine symmetric space G/K_ε に対しても ほぼ同様な次の形に定式化される.

Thm 9. Poisson 変換

$$\mathcal{P}_\lambda : \overset{r}{\oplus}\mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon\,;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

は 条件(*)のもとで onto G-isomorphism である.

証明もほぼ同様である. ただし条件(*)を弱めるときに多少のちがいがおこる.

8. 特殊固有超函数

affine symmetric space 上の特殊固有函数をいくつか考えよう.

5. で (K, K_ε)-不変帯球函数を定義したが、もっと一般に $(K_{\varepsilon'}, K_\varepsilon)$-不変帯球函数を定義できる.

$$\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon\,;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

$= \{ u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) ; u(k_{\varepsilon'} g) = u(g) \text{ for } \forall k_{\varepsilon'} \in K_{\varepsilon'} \}$

の元がそうである．$K_{\varepsilon'}$ は K_ε と同様に定義した G の subgroup である．$e^{\lambda(H^i_\varepsilon(g))}$ などと同様に $K_{\varepsilon'}$ についての"岩沢分解"を使って $e^{\lambda(H_{\varepsilon'}(g))}$ を考えることができるが，そのとき

$$\int_K e^{(\lambda-\rho)H_{\varepsilon'}(gk)} e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(k)} dk$$

などがそれである．このように一般的にするともはや実解析的でなくなる．しかしこれらの"帯球函数"はよく知られた両側 K-不変な帯球函数と無縁ではない．それらは同じ確定特異点型の微分方程式の解になっており，いくつかの異なった cycle に関する積分表示を与えているのである．また，Poisson 核 $\Phi^i_{\lambda,\varepsilon}(g) = e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(g^{-1})}$ も同様に極大過剰決定系をみたす．$\Phi^i_{\lambda,\varepsilon}(g)$ は Riemannian symmetric space 上の Poisson 核の解析接続によって得られる．

(K, K_ε)-不変帯球函数，Poisson 核の境界値は意味がある．前者は"c-function"を与え，後者は intertwining operator の核函数（の定数倍）になる．

他に $\mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元で興味深いものがある．G を semisimple linear group，$G_{\mathbb{Z}}$ を G の $\mathbb{Z}$-点とする．そして Eisenstein series

$$E(g ; \lambda) = \sum_{h \in G_{\mathbb{Z}}} e^{-(\lambda+\rho) H(g^{-1}h)}$$

を考えよう.

$$E(g;\lambda) \in \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

であるから　$E(g;\lambda)$ の境界値を定義できる. λ が generic であるとき, さらに affine symmetric space G/K_ε に Poisson 変換することにより, G/K_ε 上の保型性を有する固有函数が定義 でき, 函数等式が得られる. もっと一般に,

$$\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$$
$$=\{u\in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))\ ;\ u(hg)=u(g)\ \text{for}\ \forall h\in G_{\mathbb{Z}}\}$$

の元を Eisenstein hyperfunction と仮りに呼ぼう.（λ が generic でないとまずい）　このとき $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の次元, またその元の満たす函数等式などが問題になるが まだくわしいことはわからない. "帯球函数" や Poisson 核と同様 $E(g;\lambda)$ の境界値には意味があるかもしれない.

<u>例</u>　$G=SL(2;\mathbb{R})$, $K=SO(2)$, $G_{\mathbb{Z}}=SL(2;\mathbb{Z})$ のとき,

$$G/K \cong H=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\, z>0\}$$

$$E(z;s)=\sum_{(c,d)=1}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \qquad (z=x+\sqrt{-1}\,y)$$

決定方程式の根 s, $1-s$ に対する境界値を $\beta_s E$, $\beta_{1-s}E$ などであらわせば

$$\beta_s E = \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{|cx+d|^{2s}}$$

$$\beta_{1-s} E = 2c(s) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{2s}} \sum_{(c,d)=1} \delta\left(x+\frac{d}{c}\right)$$

ここで　$c(s) = B(\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2})$ である．これらを $G/K_\varepsilon = SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$ に Poisson 変換すれば Eisenstein hyper function が得られる．

$\beta_{1-s}E$ の係数にはデルタ函数があるが，その代りに Heaviside 函数をもってきたりして，$G/K \cong H$ に Poisson 変換したものなども意味がありそうである．（保型形式になる）．

References

[1] M. Berger : Les espaces symétriques non compacts. Ann. Ec. Norm. Sup., 74 (1957) 85~177

[2] K. Okamoto 他5名 : Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear

[3] T. Oshima : A realization of Riemannian Symmetric spaces 本講究録にのる予定

[4] I. Satake : On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. vol. 71 1960