数理解析研究所講究録
第289巻 1977年 14-23

解析関数の空間における射影作用素

早大 教育　和田淳蔵

§1. 序

はじめに Hardy 類 H^p $(1 \leqq p \leqq \infty)$ およびディスク環における射影作用素について述べる。ディスク環における議論は関数環まで拡張できる。関数環において射影作用素を考える際に、Hardy 類や $C(K)$ の商空間が関連してくる。これらの関係について論ずる。最後に関数環における最良近似と射影作用素との関係に言及する。

§2 Hardy 類 H^p における射影作用素

$\mathbb{C}$ の単位円 Γ の上の Hardy 類を H^p で表わす。L^p から H^p の上への射影作用素については、Newman, M. Riesz, Arens, Rudin などの結果が知られている。今後射影作用素は有界線型射影作用素を意味するものとする。

<u>定理2.1</u> (D. J. Newman) L^1 から H^1 の上への射影作

用素は存在しない。

この定理の証明では、もし L^1 から H^1 の上への射影作用素Pが存在すると仮定すれば、$f_\theta(\alpha)=f(\alpha+\theta)$ として

$$\tilde{P}f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Pf_\theta)_{-\theta}\,d\theta \quad (f\in L^1)$$

とおけば、

$$\tilde{P}(e^{in\theta})=\begin{cases} e^{in\theta} & (n\geqq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$

となり、かつ $\tilde{P}$ は有界線型作用素となる。すなわち $\tilde{P}$ は L^1 から H^1 への自然な射影作用素 (natural projection) である。しかし一方 $\tilde{P}$ は有界でないことが示されるので矛盾が導かれる。

<u>定理 2.2</u> (M. Riesz)　$1<p<\infty$ のとき L^p から H^p への自然な射影作用素が存在する([1], [13])。

この定理はつぎのことがらと同等である：$M>0$ が存在して、$h=u+iv\in H^p$, $v(0)=0$ なら $\|v\|_p\leqq M\|u\|_p$.

H^∞ の場合はつぎのことが Arens により与えられた。

<u>定理 2.3.</u>　L^∞ から H^∞ の上への射影作用素は存在しない。

定理 2.2 に関連してつぎのことを Wermer が示した([5], P.156)

定理2.4　Aをコンパクト Hausdorff 空間Xの上の交代環 (antisymmetric algebra) で Dirichlet 環とする。mをAで乗法的なXの上の正測度とする。Re A ∋ u に対して $u+iv \in A$, $\int v\,dm = 0$ となる v を対応させれば $u \to v$ は $L^p(dm)$－ノルムに関して有界である。ここで $1 < p < \infty$.

Gをコンパクト群、C(G)の部分多元環Aが移動不変 (translation invariant) であるとは、$f \in A$ に対して $R_x f, L_x f \in A$ となることである。ここで $R_x f(y) = f(yx)$, $L_x f(y) = f(x^{-1}y)$.

定理2.1のコンパクト群への一般化はつぎのようである (Glicksberg [3])。

定理2.5、Gをコンパクト群、AをC(G)の移動不変な部分多元環とする。そのとき $L^1(G)$ から $\overline{A}^{L^1(G)}$ の上の射影作用素が存在するための必要かつ十分条件はAが自己随伴 (self-adjoint) となることである。すなわち $f \in A$ に対して $\bar{f} \in A$.

§3. 関数環における射影作用素

Rudin [11] はつぎのことを証明した。

定理3.1　Aをディスク環としたとき、C(Γ) からAの上への射影作用素は存在しない。

これからの議論においてつぎのように定義する.

Eを Banach 空間とし、MをEの閉部分空間とする. EからMの上への射影作用素Pが存在することと、$E = M \oplus N$（ここで$N = \{x \in E : Px = 0\}$）と直和に分解されることと同等である. このときMをEの直和因子部分空間と呼ぶことにする. 今後射影作用素の存在という代りに直和因子ということにして話を進める.

つぎは定理3.1をコンパクト群の場合に拡張したものである（Glicksberg [3]）.

定理3.2　Gをコンパクト群とし、Aを$C(G)$の移動不変な閉部分多元環とする. そのときAが$C(G)$の直和因子部分空間であるための必要かつ十分条件は、Aが自己随伴となることである.

つぎの2つの定理は、定理3.1の関数環の場合への拡張である.

定理3.3　Xをコンパクト Hausdorff 空間とする. Xの上の関数環Aが$C(X)$の直和因子部分空間であり、$A^{\perp}$は$M(X) = C(X)^*$の可分な部分空間であれば、$A = C(X)$である（Pełczyński [7]）.

Aをディスク環としたとき、F. and M. Rieszの定理より、$A^{\perp} \ni \mu$は$\mu = f\,dm$（mはΓの上の Lebesgue 測度で

$f \in L^1(dm)$）となる．それゆえ $A^\perp \subset L^1(dm)$ で $L^1(dm)$ は可分であるから，定理 3.3 は Rudin の定理（定理 3.1）の拡張となつている．

つぎは Etcheberry [2] により得られた．

<u>定理 3.4.</u> A を関数環とし，A の極大イデアル空間 M_A はトリビアルでない Gleason 部分 P をもち，P ∋ m はただ1つの表現測度をもつとする．そのとき A は C(Y)（Y はコンパクト Hausdorff 空間）の直和因子部分空間と同型とはならない．

Rudin の定理（定理 3.1）はさらにつぎのように精密化される（[8]）．

<u>定理 3.5</u> ディスク環（および H^∞）は C(K)（K はコンパクト Hausdorff 空間）の商空間（quotient space）に同型とはならない．

ここで Pełczyński はつぎのような conjecture を出している．

<u>Conjecture</u> A をコンパクト Hausdorff 空間 X の上の関数環としたとき，A は Banach 環として C(K)（K はあるコンパクト Hausdorff 空間）の商空間と同型となれば，A = C(X) となるか．

Pełczyński [9] はつぎのような条件をみたす関数環にお

いて、上の conjecture が正しいことを示した．つぎがその結果である．

<u>定理 3.6</u>　A を X の上の関数環で，M_A はトリビアルでない Gleason 部分をもつとする．そのときつぎの a), b), c) が成り立つ．

a)　A は Banach 空間として，$C(K)$ の商空間とは同型にはならない．

b)　A は実 Banach 空間として，Banach 束の直和因子部分空間とは同型にはならない．

c)　A は Gordon-Lewis の無条件構造 (unconditional structure) をもたない．Gordon-Lewis の無条件構造とは、ある $k>0$ が存在して、A の任意の有限次元の部分空間 F に対して有限次元空間 B_F (基底 (b_j)) と $S_F : F \to B_F$, $T_F : B_F \to A$ となる有界線型作用素が存在して

$$T_F S_F(f) = f \quad (f \in F), \quad \|T_F\| \|S_F\| \leq k$$

かつ，任意のスカラーの列 (c_j) に対して

$$\| \sum c_j b_j \| = \| \sum |c_j| b_j \|$$

となることである．

Gordon-Lewis の構造に関しては [4] を見よ．

§4.1　最良近似と射影作用素

Aをディスク環とし、Γを単位円とする．そのとき$C(\Gamma)\ni f$のAにおける最良近似を考える．この場合、最良近似は必ずしも存在しないが、もし存在すればただ1つきまる．

つぎはAに最良近似をもつfの条件である（[14]）．

<u>定理4.1</u>　$C(\Gamma)\backslash A\ni f$が$A$において最良近似をもつための必要かつ十分条件は、$f=g+\lambda h$の形となり、$g$, h, λはつぎをみたすことである．

(i)　$g\in A$, $h\in C(\Gamma)$, $\|h\|=1$, $\lambda>0$.

(ii)　Lebesgue測度mに対して、$\varphi\in H^1(dm)$, $\int\varphi dm=0$, $\varphi\neq 0$ (a.e. m)となるφで、$h=|\varphi|/\varphi$ (a.e. m)となる。

この定理でわかるように、Aにおいて最良近似をもつf ($\in C(\Gamma)$)の集合Bは$C(\Gamma)$で線型部分空間をなしていない。いま$B\supset N$をAを含む$C(\Gamma)$の1つの線型部分空間としたとき、$N\ni f$に対してfのAにおける最良近似をPfとおく．しかしPはNの上で一般には線型とならない．もし$P:N\to A$が線型とすれば、$Pf=f$ ($f\in A$)でかつPは有界であるゆえ．$P:N\to A$はAの上への射影作用素となる．

定理4.1よりつぎが導かれる（[15]）．

<u>定理4.2</u> $N(\subset B)$ を A を含む $C(\Gamma)$ の線型部分空間とする。上のような P が線型(すなわち P が N から A の上への射影作用素)になるとすれば、A は N において余次元(co-dimension) 1 となる。ただし $N \neq A$ とする。

N を $C(\Gamma)$ の閉部分空間、$N \supsetneqq A$ としたとき、N から A への射影作用素 P が A における最良近似を表わすための必要かつ十分条件は $\|P\| = 2$ である([14])から、つぎのことがいえる。

<u>定理4.3</u> A をディスク環、N を A を含む $C(\Gamma)$ の閉部分空間とし、A を N に対する余次元 $\geqq 2$ とする。そのとき N から A の上への任意の射影作用素 P に対して $\|P\| > 2$ である.

<u>注意</u> (1) 上の定理に関連してつぎの定理がある([3]):
A を X の上の関数環とし、$A \neq C(X)$ で $\partial_A = X$ とする。そのとき $C(X)$ から A の上への射影作用素 P に対して $\|P\| > 2$ である.

(2) 定理4.2, 4.3 は適当に条件をつけた関数環の場合に拡張できる.

(3) A をディスク環とする。$N = \{\lambda z + h : \lambda \in \mathbb{C}, h \in A\}$ とし、$P(\lambda z + h) = h$ とおけば、P は N から A の上への線型作用素で、Pf は f の A における最良近似となり、$\|T\| = 2$ となる(定理4.2参照).

参照文献

[1] S. Bochner : Generalized conjugate and analytic functions without expansions, Proc. Nat. Acad. Sci. 45 (1959) 855-857.

[2] A. Etcheberry : Some uncomplemented uniform algebras, Proc. A.M.S. 43 (1974) 323-325.

[3] I. Glicksberg : Some uncomplemented function algebras, Trans. A.M.S. 111 (1964) 121-137.

[4] Y. Gordon and D.R. Lewis : Absolutely summing operators and local unconditional structures, Acta Math. 133 (1974) 27-48.

[5] K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall 1962.

[6] D.J. Newman : The non-existence of projections from L^1 to H^1, Proc. A.M.S. 12 (1961) 98-99.

[7] A. Pełczyński : Uncomplemented function algebras with separable annihilators, Duke Math. J. 33 (1966) 605-612.

[8] ———— : Sur certain propriétés isomorphiques nouvelles des espaces de Banach de fonctions

holomorphes A et H^∞, C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1974) 9-12.

[9] A. Pełczyński : On Banach space properties of uniform algebras, Space of Analytic Functions, Seminar held at Kristiansand, Norway, Lectures Notes in Math. 512, Springer (1976) 109-116.

[10] H. Rosenthal : Projections onto Translation-Invariant Subspaces of $L^p(G)$, Memoirs A. M. S. 63, 1966.

[11] W. Rudin : Projections on invariant subspaces, Proc. A. M. S. 13 (1962) 429-432.

[12] I. Singer : Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Springer 1970.

[13] A. Zygmund : Trigonometric Series, 2d. Ed. Cambridge Univ. Press. 1959.

[14] 和田淳藏：関数空間における最良近似．京大数理解析研．講究録 265 (1976) 105-114.

[15] ————：関数環における最良近似と射影作用素．早大学術研究 25巻 (近刊).