数理解析研究所講究録
第289巻 1977年 45-60

Abstract setting for Toeplitz operators

山形大 理　富山 淳
東北大 理・薮田公三

§1. まえがき. T を単位円周とし、その上のルベーグ測度に対する $L^2(T)$, $L^\infty(T)$ を考える. $L^\infty(T)$ の関数 ϕ の $L^2(T)$ 上での掛算作用素を M_ϕ とかき、$L^2(T)$ から Hardy class $H^2(T)$ への射影を P とすると、ϕ による $H^2(T)$ 上の Toeplitz 作用素 T_ϕ は

$$T_\phi = PM_\phi \,|\, H^2(T) \quad \text{i.e.} \quad P(\phi f) \quad (f \in H^2(T))$$

として定義される. $C(T)$ を T 上の(複素数値)連続関数環とし $\mathcal{T}(C(T))$ を $\{T_\phi \mid \phi \in C(T)\}$ で生成された C^*-環とする。このときよく知られているように $\mathcal{T}(C(T))$ は $H^2(T)$ 上の既約な C^*-環(GCR 環)であり、その commutator ideal はコンパクト作用素環 $\mathcal{LC}(H^2(T))$ と一致し、exact sequence

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{LC}(H^2(T)) \longrightarrow \mathcal{T}(C(T)) \xrightarrow[\rho]{} C(T) \longrightarrow \{0\}$$

が得られる。ここで $\rho(T_\phi) = \phi$ $(\phi \in C(T))$ である.
この結果は所謂 index 理論の新展開として最近目ざましい発

展をみせているB-D-F理論(Brown-Douglas-Fillmore, [3] [4], [5] etc.)の一つの出発点となったものであるがこの定理や他の同様な $L^\infty(T)$ についての"結果自体"の C^*-環としての吟味は今迄あまりよく考えられていなかったように思える。ここでは上のことを可換な C^*-環の線型表現の話として一般的にとらえその構造を調べると共に、一般の関数環についての Toeplitz 作用素の議論を考えてみる。

§2. Toeplitz 作用素の abstract setting. X をコンパクトハウスドルフ空間, $C(X)$ をその上の連続関数環とし A を X 上の関数環とする。A の Shilov 境界を $\Gamma(A)$, Choquet 境界を $Q(A)$ とかく。A は一般には自己共役環ではないが A 上の有界線型汎関数 α が $\alpha(1)=\|\alpha\|=1$ をみたすとき $*$-環の時と同様に state, 又 A の state 全体の中の端点を pure state と呼ぶことにする。よく知られているように A の pure state は $C(X)$ の pure state に一意に拡大出来、その拡大は $Q(A)$ の点の evaluation α_t にほかならない。以下の議論はこのことを一つのもととしている。ここで Krein-Milman の定理から上のことは又 A の pure state の $C(X)$ への state としての拡大も一意になることを示していることに注意する。ヒルベルト空間 H に対してその上の有界線型作用素全体を $\mathcal{L}(H)$ 又 $\mathcal{LC}(H)$ を

コンパクトな作用素全体とする. τを$C(X)$から$\mathcal{L}(H)$への線型表現で $\tau(1)=1$, $\|\tau\|\leq 1$ となるものとする. τはこの条件の下では positive な写像になるがもっと強く completely positive な写像になる [15]. 従って Stinespring の定理([15])によりHを含むヒルベルト空間K (dilation space) と$C(X)$から$B(K)$への$*$-表現πがあり, PをHへの射影としたとき

$\tau(\phi)=P\pi(\phi)|_H$ とかける. $\tau(\phi)$は Toeplitz 作用素の abstract form であるがここでもしもτがA上で isometric であれば

$$\|\tau(\phi)\|\geq \max_{t\in \Gamma(A)}|\phi(t)|$$

である.

実際$\mathfrak{M}(A)$の点t (A及び$C(X)$上の character と考える) について, それによる$\tau(A)$の pure state を$\tau(C(X))$の state $\hat{\alpha}$に拡大すると, $C(X)$での拡大の一意性から $\hat{\alpha}\circ\tau=t$ となって $|\phi(t)|=|\hat{\alpha}\circ\tau(\phi)|\leq\|\tau(\phi)\|$ が出てくる.

これから$\Gamma(A)=X$のときには, この状況下でも既にτは isometric な表現になる. 次の二つの仮定をおく.

(a) τはA上で isometric

(b) $\tau(\phi\varphi)=\tau(\phi)\tau(\varphi)$ $(\phi\in C(X),\ \varphi\in A)$

$\mathfrak{T}(C(X))$を$\{\tau(\phi)\mid\phi\in C(X)\}$から生成された$C^*$-環, $\mathfrak{C}(C(X))$をその commutator ideal とする. $\mathfrak{T}(C(X))$は又$\{\tau(\varphi)\mid\varphi\in A\}$から生成された$C^*$-環とも考えられる.

補題2.1. $\tau(\varphi)$ ($\varphi\in A$) は subnormal 作用素である.

証明. 前にのべたτの形から, $\varphi\in A$ について

$$P\pi(\varphi)^*\pi(\varphi)|H = \tau(\varphi)^*\tau(\varphi) = P\pi(\varphi)^*P\pi(\varphi)|H$$

$$\Longrightarrow \quad P\pi(\varphi)^*(1-P)\pi(\varphi)|H=0 \quad よって \quad (1-P)\pi(\varphi)P=0$$

ゆえに $\quad \tau(\varphi)=\pi(\varphi)|H$

Xの点 $t\in\mathfrak{Q}(A)$ からつくられた $\tau(A)$ の pure state を α_t とする. 次の補題が本節の鍵になるものである.

補題2.2. α_t は $\mathfrak{T}(C(X))$ の state に一意に拡大出来, 拡大された state は $\mathfrak{T}(C(X))$ の character である.

証明. $\tau(A)$ は $\mathfrak{T}(C(X))$ の character は分離出来るから, α_t の state 拡大が character になることを示せばよい. $\hat{\alpha}$ を α_t の state 拡大とし

$$\mathcal{L}=\{T\in\mathfrak{T}(C(X)) \mid \hat{\alpha}(T^*T)=0\} \ (\text{left kernel})$$

とおく. 前にものべたように $\hat{\alpha}(\tau(\phi))=\phi(t)$ であるから任意の $\varphi\in A$ について条件(b)から

$$\hat{\alpha}((\tau(\varphi)-\varphi(t))^*(\tau(\varphi)-\varphi(t))) = \hat{\alpha}(\tau((\bar{\varphi}-\overline{\varphi(t)})(\varphi-\varphi(t))))$$

$$=\hat{\alpha}(\tau(|\varphi-\varphi(t)|^2))=0.$$

よって $\tau(\varphi)-\varphi(t)\in\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ は $\mathfrak{T}(C(X))$ の左イデアルであるから

$$\mathfrak{T}(C(X))(\tau(\varphi)-\varphi(t))\subset\mathcal{L}$$

よって任意の $T\in\mathfrak{T}(C(X))$ について

$\hat{\alpha}(T(\tau(\varphi)-\varphi(t)))=0$. 従って任意の $T\in\mathfrak{T}(C(X))$, $S\in\tau(A)$ について

$$\hat{\alpha}(TS)=\hat{\alpha}(T)\hat{\alpha}(S).$$

一方補題 2.1 から $SS^*\leqq S^*S$ であるから特に $S-\alpha_t(S)$ について、$S-\alpha_t(S)\in\mathcal{L}$ より

$$\hat{\alpha}((S-\alpha_t(S))(S-\alpha_t(S))^*)=0.$$

即ち $S^*-\overline{\alpha_t(S)}\in\mathcal{L}$. 従ってあと同様にして

$$\hat{\alpha}(TS^*)=\hat{\alpha}(T)\overline{\hat{\alpha}(S)},\quad \text{i.e.}\ \hat{\alpha}(ST)=\hat{\alpha}(S)\hat{\alpha}(T)$$

$\mathfrak{T}(C(X))$ は $\tau(A)$ から生成されているから以上から $\hat{\alpha}$ は $\mathfrak{T}(C(X))$ の character である.

Δ を $\mathfrak{T}(C(X))$ の character の集合とし弱* 位相を考えておく. $\mathfrak{T}(C(X))$ の任意の character α は条件 (b) から $C(X)$ の character を定義するから α に対して X の点 t_α が(一意に)きまって $\alpha(\tau(\phi))=\phi(t_\alpha)$ $(\phi\in C(X))$ とかける. $\Gamma(\tau)$ をこの連続な対応による Δ の X 内の像とすると、$\Gamma(\tau)$ はコンパクトであり更に Δ は $\Gamma(\tau)$ と同位相になっている. 一方 commutator ideal $\mathfrak{C}(C(X))$ はすべての character の kernel の共通部分であるから $\mathfrak{T}(C(X))/\mathfrak{C}(C(X))$ は自然な形で Δ 上の連続関数環 $C(\Delta)$ とみなすことが出来る. よって上の補題と合せて次の結果が得られる.

定理 2.3. $\{C(X), A\}$ の表現 τ について (a), (b) の仮定を

おく. このとき $\Gamma(T)$ は A の一つの閉境界であり, $\mathfrak{T}(C(X))$ から $C(\Gamma(T))$ への $*$-準同型 ρ を

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{G}(C(X)) \xrightarrow[i]{} \mathfrak{T}(C(X)) \xrightarrow[\rho]{} C(\Gamma(T)) \longrightarrow \{0\}$$

が ~~exa~~ exact sequence になるようにとれる. ここで i は埋込みの写像, ρ は $\rho(T(\phi)) = \phi|\Gamma(T)$ をみたす.

この定理は $\mathfrak{G}(C(X))$ の構造を別にすればこの形では一番一般的な結果である. ここで $T(\phi)$ のノルムの評価は前にのべた形よりもっと精密に次のようになる. 先ず

$$I = \{\phi \in C(X) \mid T(\phi) = 0\}$$

とおくと条件(b)から I は $C(X)$ の ideal になるから X の閉集合 $S(T)$ が存在して

$$I = \{\phi \in C(X) \mid \phi|S(T) = 0\}$$

$S(T)$ を T の support と呼ぶことにする. $S(T)$ のつくり方と前の定理から

系 2.4. $\phi \in C(X)$ について

$$\max\{|\phi(t)| \mid t \in S(T)\} \geq \|T(\phi)\| \geq \|T(\phi)\|_{sp}$$
$$\geq \max\{|\phi(t)| \mid t \in \Gamma(T)\}$$

ここで $\|T(\phi)\|_{sp}$ は $T(\phi)$ の spectrum norm である.

これから例えば $T(\phi)$ が quasi-nilpotent なら $\phi|\Gamma(T) = 0$ となること(従って時には $\phi = 0$)がわかる. 上の三つの集合は $S(T) \supset \Gamma(T) \supset \Gamma(A)$ となっているが一般にはこれ

らが等しいとは限らない。

さてToeplitz作用素の議論で実際に意味あるのは $\mathcal{T}(C(X))$ が既約でI型の C^*-環になっているときであるが $\mathcal{LC}(H)$ と $\mathcal{T}(C(X))$ の共通部分については次のことが成り立つ。

系 2.5. $\mathcal{T}(C(X))$ が $\mathcal{J}(C(X))$ の中で弱位相で稠密であるとすると

$$\mathcal{LC}(H) \cap \mathcal{J}(C(X)) \subset \mathcal{T}(C(X))$$

これは $\mathcal{J}(C(X))$ の pure state である character を $\mathcal{L}(H)$ の pure state に拡大したものは条件から normal にはなり得ない。従って[7; 定理3]から $\mathcal{LC}(H)$ 上で0になることから導びかれる。

Character の空間Δの形については Bunce[2]の結果を利用して、Δは $\mathcal{T}(A)$ の中の互に可換な subnormal 作用素の組 $(T_1, T_2, \cdots T_n)$ の joint approximate spectrum $\sigma_\pi(T_1, T_2, \cdots T_n)$ の $\{T_i\}$ を動かした時の inductive limit であるというとらえ方も出来る。

一般にヒルベルト空間H上の互に可換な作用素の組 $(T_1, T_2, \cdots T_n)$ についてその joint approximate spectrum $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$ とは

$$\mathcal{L}(H)(T_1-\lambda_1)+\mathcal{L}(H)(T_2-\lambda_2)+\cdots+\mathcal{L}(H)(T_n-\lambda_n)$$

が $\mathcal{L}(H)$ の proper なイデアルになること、として定義出来

るが実は C^*-環の枠内では上の定義は $\{T_i\}$ を含む C^*-環によらないことが示せる。次の命題は又 Bunce [2] の議論の精密化でもある。

命題 2.6. $(T_1, T_2, \cdots T_n)$ を H 上の互に可換な有界作用素の組とし、B を $\{T_i\}$ と単位作用素を含む $\mathcal{L}(H)$ の C^*-部分環とする。このとき $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$ について次のことは同値である。

(1) $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n) \in \sigma_\pi(T_1, T_2, \cdots T_n)$

i.e. $\mathcal{L}(H)(T_1-\lambda_1) + \mathcal{L}(H)(T_2-\lambda_2) + \cdots + \mathcal{L}(H)(T_n-\lambda_n) \subsetneqq \mathcal{L}(H)$

(2) $B(T_1-\lambda_1) + B(T_2-\lambda_2) + \cdots + B(T_n-\lambda_n) \subsetneqq B$

(3) $\exists$ B の state α ; $\alpha(T_i) = \lambda_i$

$$\alpha(ST_i) = \alpha(S)\alpha(T_i) \quad (\forall S \in B)$$

(4) $\exists\, \mathcal{L}(H)$ の state α ; $\alpha(T_i) = \lambda_i$

$$\alpha(ST_i) = \alpha(S)\alpha(T_i) \quad (\forall S \in \mathcal{L}(H))$$

ここで(3),(4)の state としては pure state をとることも出来る。

証明は略するが補題 2.2 の証明はこの考え方と関連しており、その意味では Bunce の結果と Żelazko [18] の結果を使えば定理 2.3 を別に示すことも出来る。

§3. 関数環の Toeplitz 作用素。 μ を X 上の有限非負な正則ボレル測度とし、$H^2(\mu)$ を $L^2(\mu)$ での A の閉包とする。$L^\infty(\mu)$

の関数 ϕ の $L^2(\mu)$ 上での掛算作用素を M_ϕ, P を $H^2(\mu)$ への $L^2(\mu)$ での射影とすると、ϕ による(一般化された) Toeplitz 作用素 T_ϕ は

$$T_\phi f = PM_\phi f = P\phi f \qquad (f \in H^2(\mu))$$

として定義出来る. $H^\infty(\mu)$ を A の $L^\infty(\mu)$ での弱*閉包とする.

このとき通常の Toeplitz 作用素の時と同様に、$\phi \in L^\infty(\mu)$, $\varphi \in H^\infty(\mu)$, $f \in H^2(\mu)$ について

$$T_\varphi f = \varphi f \quad , \qquad T_\phi T_\varphi f = T_{\phi\varphi} f = P\phi\varphi f$$

が成り立つ. よって T_φ は $H^2(\mu)$ 上の subnormal 作用素である. 又更に $\varphi \in H^\infty(\mu)$ について

$$\left(\int|\varphi|^j d\mu\right)^{1/j} \leq \|T_\varphi^j 1\|_2^{1/j} \|1\|_2^{1/j} \leq \|T_\varphi\| \|1\|_2^{2/j} \quad (j=1,2,\cdots)$$

から $j \to \infty$ として $\|\varphi\|_\infty \leq \|T_\varphi\|$ よって $\|\varphi\|_\infty = \|T_\phi\|$, が得られる. 従って今 $\tau(\phi) = T_\phi$ とすれば τ は $\{L^\infty(\mu), H^\infty(\mu)\}$ の線型表現として前節の条件をみたすし、又 $\mathrm{supp}\,\mu \supset \Gamma(A)$ の時は $\{C(X), A\}$ の表現としても条件をみたしている. 特に $\mathrm{supp}\,\mu = \Gamma(A)$ の時は

$$\Gamma(A) = \mathrm{supp}\,\mu \supset S(\tau) \supset \Gamma(\tau) \supset \Gamma(A)$$

であるから定理 2.3 から次の結果が成り立つ.

定理 3.1. 上の状況の下で $\mathrm{supp}\,\mu = \Gamma(A)$ とする. このとき $\mathcal{T}(C(X))$ から $C(\Gamma(A))$ への *-準同型 ρ をとって

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C}(C(X)) \xrightarrow[i]{} \mathcal{T}(C(X)) \xrightarrow[\rho]{} C(\Gamma(A)) \longrightarrow \{0\}$$

が exact sequence であるように出来る。ここで $\rho(T_\phi) = \phi|\Gamma(A)$ である。

Aの character の $\Gamma(A)$ での表現測度はいつも上の条件をみたすとは限らないが、Aから上のような状況は次のようにしてつくることが出来る。それには表現測度 μ を特に $Q(A)$ に集中しているようにとると、$\Gamma(A|\mathrm{supp}\,\mu) = \mathrm{supp}\,\mu$ であるから、$A|\mathrm{supp}\,\mu$ の $\mathrm{supp}\,\mu$ 上の関数としてのノルム閉苞 A' をとればよい。

前の系2.4に対応する結果はここでは

系3.2. $\|T_\phi\| = \|T_\phi\|_{sp} = \max\{|\phi(t)| \mid t \in \Gamma(A)\}$.

特に T_ϕ quasi-nilpotent $\rightleftarrows$ $\phi|\Gamma(A) = 0$

系2.5の条件のここでの対応条件としては

系3.3. $H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$ とし、更に $H^2(\mu)$ の中の実数値関数は定数のみとする。このとき $\mathcal{T}(C(X))$ は既約 C^*-環で、又

$$\mathcal{L}C(H) \cap \mathcal{T}(C(X)) \subset \mathcal{C}(C(X)).$$

よって $\phi_{ij} \in C(X)$ について、$\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} T_{\phi_{ij}}$ がコンパクト作用素であれば関数 $\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \phi_{ij}$ は $\Gamma(A)$ 上で0になる。特に T_ϕ がコンパクトなことと $\phi|\Gamma(A) = 0$ とは同値である。

証明. X上の定数関数1は $H^2(\mu)$ で $\mathcal{T}(C(X))$ の generating vector になっているから、その commutant $\mathcal{T}(C(X))'$ の separating vectorである. よって $\mathcal{T}(C(X))'$ の non-zero な射影 Q に対して $Q1$ は $H^2(\mu)$ の non-zero な実数値関数になる. 従ってこの仮定の下では $Q1=1$ となり $Q=1$, 即ち $\mathcal{T}(C(X))$ は既約である. 又 $\mathcal{T}(C(X))$ を可換とすると既約性から $H^2(\mu)$ は1次元になってしまうから $H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$ より $\mathcal{C}(C(X)) \neq \{0\}$. 従って系2.5からあとの結果も得られる.

次に $L^\infty(\mu)$ の場合は、$L^\infty(\mu)$ の character の空間を $\mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$ とすると、$L^\infty(\mu)$ は $C(\mathfrak{M}(L^\infty(\mu)))$ と同一視出来るから、$H^\infty(\mu)$ が $\mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$ の点を分離するときには前節の結果を $\{L^\infty(\mu), H^\infty(\mu)\}$ にあてはめることが出来る. 特に

定理3.4. $\mathfrak{M}(L^\infty(\mu)) = \Gamma(H^\infty(\mu))$ のとき, $\mathcal{T}(L^\infty(\mu))$ から $L^\infty(\mu)$ への *-準同型 ρ をとって

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C}(L^\infty(\mu)) \xrightarrow[i]{} \mathcal{T}(L^\infty(\mu)) \xrightarrow[\rho]{} L^\infty(\mu) \longrightarrow \{0\}$$

が exact sequence であるように出来る. ここで $\rho(T_\phi)=\phi$.

$H^\infty(\mu)$ が次のような条件をみたすときには上の条件が得られる. 即ち

命題3.5. 集合 $\{f=\sum_{finite}|g_j| \mid g_j \in H^\infty(\mu)\}$ が $L^\infty(\mu)$ の正値関数の集合の中でノルムで稠密になっているとき, $H^\infty(\mu)$ は $\mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$ の点を分離し, $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$ となる.

証明. $Y=\mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$ とし τ を $L^\infty(\mu)$ の Gelfand 表現とする.

Yの点α, βをとり$H^\infty(\mu)$上で$\alpha=\beta$とすると、$g \in H^\infty(\mu)$について

$$\alpha(|g|)^2 = \alpha(|g|^2) = |\alpha(g)|^2 = |\beta(g)|^2 = \beta(|g|)^2.$$

よって$\alpha(|g|) = \beta(|g|)$となり仮定からα, βは$L^\infty(\mu)$の任意の正値関数上で等しい。ゆえに$\alpha=\beta$, 即ち$H^\infty(\mu)$はYの点を分離する. 即ち$H^\infty(\mu)$はY上の関数環である. 次にVをYの点vの近傍とすると$L^\infty(\mu)$の関数hを

$$0 \leq \tau(h) \leq 1, \quad \tau(h)(v) = 1, \quad \tau(h)(y) = 0 \quad y \in Y \sim V$$

となるようにとれる。仮定から$H^\infty(\mu)$の関数$g_1, g_2, \cdots g_k$をえらんで$\| h - \sum_{j=1}^{k} |g_j| \|_\infty < 1/4$とすると

$$\sum_{j=1}^{k} \tau(|g_j|)(v) > \frac{3}{4}, \quad \sum_{j=1}^{k} \tau(|g_j|)(y) < \frac{1}{4} \quad y \in Y \sim V.$$

ここでg_jをとりかえて$\tau(|g_j|)(v) = \tau(g_j)(v) \geq 0$としてもかまわないから、上式から

$$\tau\Big(\sum_{j=1}^{k} g_j\Big)(v) > \frac{3}{4}, \quad \Big|\tau\Big(\sum_{j=1}^{k} g_j\Big)(y)\Big| < \frac{1}{4} \quad y \in Y \sim V.$$

よって$v \in \Gamma(H^\infty(\mu))$, 即ち$\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$.

証明了.

定理3.4に続いて系3.2, 3.3と同様なことがT_ϕ $(\phi \in L^\infty(\mu))$について成立する. 最后に系3.3の仮定(又は$H^\infty(\mu)$については$\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathfrak{M}(L^\infty(\mu))$)の下ではもし$\mathcal{T}(C(X))$がnon-zeroなコンパクト作用素を含んでいたとすると、$\mathcal{T}(C(X))$

は又既約だから

$$\mathcal{LC}(H) \subset \mathfrak{T}(C(X)) \subset \mathfrak{T}(L^\infty(\mu)).$$

従って定理3.1と3.4から $\phi \in C(X)$ (又は $\phi \in L^\infty(\mu)$) について M_ϕ の spectrum は T_ϕ の essential spectrum に含まれている. T_ϕ の essential spectrum とは T_ϕ の Calkin algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{LC}(H)$ での像の spectrum である.

§4. 適用例. いくつかの具体例をあげる.

a) A を X 上の hypo-Dirichlet 環とし, Φ を A の character, μ をその unique な logmodular 表現測度とすると, $\Gamma(H^\infty(\mu)) = \mathfrak{M} \cap L^\infty(\mu)$ である. 従ってここでは定理3.4を適用出来る.

b) D を複素平面上の有界領域で $\partial D = X$ が n 個の共通部分のない analytic な Jordan 曲線からなっているとする. a を D の点とする. A を $\bar{D}$ で連続で D で正則な関数のつくる X 上の関数環とし μ を a と D に関する X 上の調和測度とすると, A は hypo-Dirichlet 環であり, $\operatorname{supp}\mu = X$. 従って定理3.1から

$$C(X) \cong \mathfrak{T}(C(X))/\mathcal{C}(C(X)).$$

これは $\mathfrak{T}(C(X)) = \mathcal{LC}(H^2(\mu))$ の部分を除けば Abrahamse の定理[1] に対する別な approach になる.

c) M を Stein 空間 ~~多様体~~, Ω をその中の relatively compact strongly pseudo-convex domain で smooth boundary X

をもつものとする。Aを$\bar{\Omega}$の近傍で解析的な関数の集合の閉包とすると、AはX上の関数環であり$\Gamma(A)=X$である。更にμをM上のhermitian metricからひきおこされたX上の測度とすると $\mathrm{supp}\,\mu = X$. 一方Folland-Kohnの結果から([9；定理5.4.12]) $\mathcal{C}(C(X)) \subset \mathcal{LC}(H^2(\mu))$であり、$H^2(\mu)$の実数値関数は定数のみである。又明らかに$H^2(\mu) \neq L^2(\mu)$, 従って系3.3より $\mathcal{C}(C(X)) = \mathcal{LC}(H^2(\mu))$ 且つ $\mathcal{T}(C(X))/\mathcal{LC}(H^2(\mu)) \cong C(X)$. これらとその関連結果は[11]及び[16]の一般化になっているがその詳細は本研究会の佐藤―薮田の講演にのべられる筈である。(cf. [14], [17]).

文献

1. M. B. Abrahamse, Toeplitz operators on multiply-connected regions, Amer. J. Math., 96 (1974), 261–297.
2. J. Bunce, The joint spectrum of commuting nonnormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 499–505
3. L. G. Brown, Operator algebras and algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 1119~1121
4. ——, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extension of C^*-algebras, Springer lecture note 345, 58–128
5. ————, Extensions of C^*-algebras, operators

with compact self-commutators, and K-homology, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 973-978

6. L. A. Coburn and R. G. Douglas, C^*-algebras of operators on a half-space. I, IHES Publ. Math., 40 (1971), 59-67

7. J. Dixmier, Les fonctionelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. of Math., 51 (1950), 387-408.

8. R. G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators, CBMS 15, Amer. Math. Soc., 1973.

9. G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press 1972.

10. T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice Hall 1969.

11. J. Janas, Toeplitz operators related to certain domains in $\mathbb{C}^n$, Studia Math. 54 (1975), 73-79

12. ———, Toeplitz operators for a certain class of functions algebras, Studia Math., 55 (1975), 157-161

13. R. R. Phelps, Lectures ~~notes~~ on Choquet's Theorem, van Nostrand, Princeton N. J., 1966.

14 H. Sato and K. Yabuta, Toeplitz operators on strongly psedo-convex domains in Stein spaces, in preparation

15. W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 211–216.

16. U. Venugopalkrishna, Fredholm operators associated with strongly pseudo-convex domains in $\mathbb{C}^n$, J. Functional Analysis, 9 (1972), 349–372.

17. K. Yabuta, A remark to a paper of Janas: Toeplitz operators related to a certain domains in $\mathbb{C}^n$, to appear

18. W. Żelazko, On a problem concerning joint ~~spectra~~ approximate joint spectra, Studia Math., 45 (1973), 239–240.