数理解析研究所講究録
第 290 巻 1977 年 1-8



# Banach 束の作用素に関連した不等式

北大 応電研　安藤 毅

1. まえがき.　E を完備な(複素係数) Banach 束とする. E 上の (o)-有界な線形作用素 (i.e. (o)-有界部分集合を (o)-有界部分集合へ移す) $S$ に対してその modulus $|S|$ が定義される,

$$|S|x = \bigvee_{|y| \leq x} |Sy| \qquad (0 \leq x \in E).$$

例えば, $E = \mathbb{C}^n$ で $S = (\alpha_{ij})$ と行列表示がなされているときは $|S| = (|\alpha_{ij}|)$ に外ならない.

さて, $T$ が正(positive)作用素で, $|\xi| > r(T) \equiv$ "$T$ の spectre 半径" のときは $(\xi - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1} T^n$ より $\xi(\xi - T)^{-1}$ および $T(\xi - T)^{-1}$ は共に (o)-有界である. われわれは不等式

$$|T(\xi - T)^{-1}| \leq |\xi(\xi - T)^{-1}|$$

を $\xi$ の適当な範囲で, また $T$ と $E$ にある条件を課することによって $|\xi| > r(T)$ なる全ての $\xi$ に証明したい.

一般に恒等式

$$1 + T(\zeta - T)^{-1} = \zeta(\zeta - T)^{-1}$$

が成立しているので、上の不等式は何も奇異なものではないが、決して自明とは思われない。証明が困難なのはBanach空間での有用な手段である duality が使用できないためである。実際 (o)-有界な $S$ に対し $|S^*|$ と $|S|^*$ は必ずしも一致しない。(cf. [2] p. 296).

2. 射影. E上の(o)-有界作用素の全体 $\mathcal{L}^r(E)$ は普通の順序と norm $\|S\|_r := \||S|\|$ に関して完備(複素) Banach束となる。$1 \in \mathcal{L}^r(E)$ であるから、1に生成される band (i.e. (o)-直和因子) を $\mathcal{J}$ とする。(E上の)全ての射影 (band projection) は $\mathcal{J}$ に属することは明らかであるが更に次が成り立つ。

**[補題 1]** (Nakano [1]). $\mathcal{J}$ は (E上の) 射影の1次結合の全体の norm closure である。$\mathcal{J}$ 上では2つの norm $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_r$ は一致し

$$\|S\|_r = \|S\| = \inf\{\lambda > 0 : |S| \leq \lambda\} \qquad (S \in \mathcal{J}).$$

$\mathcal{L}^r(E)$ から band $\mathcal{J}$ への射影を $P_{\mathcal{J}}$ とかこう。

[定理 1]　$T$ が正作用素なら

$$|T(\zeta-T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta-T)^{-1}| \qquad {}^\forall|\zeta| > 3\cdot r(T).$$

証明．射影の一般的性質として $P_J$ および $1-P_J$ は

$$|P_J S| = P_J|S|, \quad |(1-P_J)S| = (1-P_J)|S|$$

をみたすから，$|\zeta| > 3\cdot r(T)$ のとき次を示せばよい

$$|P_J[T(\zeta-T)^{-1}]| \leq |P_J[\zeta(\zeta-T)^{-1}]|, \quad |(1-P_J)[T(\zeta-T)^{-1}]| \leq |(1-P_J)[\zeta(\zeta-T)^{-1}]|$$

ところで $P_J 1 = 1$ と $\zeta(\zeta-T)^{-1} = T(\zeta-T)^{-1}+1$ より上の才2の(不)等式は常に成立する．また才1の不等式が成立するための充分条件は $|P_J[T(\zeta-T)^{-1}]| \leq 1/2$ である．補題1よりこの条件は $\|P_J[T(\zeta-T)^{-1}]\|_r \leq 1/2$ と同値である．もし $|\zeta| > 3\|T\|$ なら，$T$ の正作用素なることから

$$\|P_J[T(\zeta-T)^{-1}]\|_r \leq \|T(\zeta-T)^{-1}\|_r$$

$$\leq \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}|\zeta|^{-n}T^n\Big\|_r \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\zeta|^{-n}\|T\|^n \leq 1/2$$

で上記の条件が満たされる．

$|\zeta| > 3\cdot r(T)$ のときは $|\zeta| > 3(r(T)+\varepsilon)$ なる $\varepsilon>0$ をとり，$E$ に新しい norm

$$\|x\|' := \sum_{n=0}^{\infty}(r(T)+\varepsilon)^{-n}\|T^n x\|$$

を導入すると，容易に $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ は同値なことがわかる．この新しい norm に関し

$$3\|T\|' \leq 3(r(T)+\varepsilon) < |\zeta|$$

となるから上の方法を使えばよい(終).

3. <u>Reduction</u>. E を discrete (i.e. atomic) 部分 $E_d$ と continuous (i.e. non-atomic) 部分 $E_c$ に分ける。
$E = E_d \oplus E_c$. それぞれへの射影を $P_d$ ; $P_c$ とかく。これを使って $\mathcal{L}^r(E)$ の射影、例えば、$\mathbf{P}_{dc}$ を $\mathbf{P}_{dc} S := P_d S P_c$ で定義する。同様に $\mathbf{P}_{cc}$, $\mathbf{P}_{cd}$, $\mathbf{P}_{dd}$ が定義される。

[補題 2] 正作用素 $T$ に関し次の条件は互に同値である。

(a) $|T(\xi - T)^{-1}| \leqq |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad {}^\forall|\xi| > r(T)$.

(b) $\mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J |T(\xi - T)^{-1}| \leqq \mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad {}^\forall|\xi| > r(T)$.

証明. (a) $\Rightarrow$ (b) は射影の性質から明.

(b) $\Rightarrow$ (a). 定理 1 の証明にあるように、(b) の下に、

$$\mathbf{P}_J |T(\xi - T)^{-1}| \leqq \mathbf{P}_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad {}^\forall|\xi| > r(T)$$

を示せばよい。まず $\mathbf{P}_{cd}$, $\mathbf{P}_{dc}$ の定義と補題 1 から

$$\mathbf{P}_J = \mathbf{P}_{cc}\mathbf{P}_J + \mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J$$

となるから、(b) の下では、更に reduce された

$$\mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J |T(\xi - T)^{-1}| \leqq \mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J |\xi(\xi - T)^{-1}| \quad {}^\forall|\xi| > r(T)$$

を証明すればよいことになる。

この最後の不等式が成り立たないとしよう。すなわち
${}^\exists|\xi_0| > r(T)$, ${}^\exists$ atomic 射影 $P$ で

$$P|T(\xi_0 - T)^{-1}|P = P \cdot \mathbf{P}_{dd}\mathbf{P}_J |T(\xi_0 - T)^{-1}| \cdot P \gneqq$$

$$\gneqq P\cdot P_{dd}P_J|\zeta_0(\zeta_0-T)^{-1}|\cdot P = P|\zeta_0(\zeta_0-T)^{-1}|P$$

となる. $P$ は atomic よりどの $S\in\mathcal{L}^r(E)$ に対しても $PSP$ は $P$ の係数倍になる. それで函数 $\varphi(\zeta)$ を円 $|\zeta|=|\zeta_0|$ 上で

$$\varphi(\zeta)P = P|\zeta(\zeta-T)^{-1}|P - P|T(\zeta-T)^{-1}|P$$

で定義すると, 上記の $\zeta_0$, $P$ に関する条件は $\varphi(\zeta_0)<0$ のことになる. 一方 $T$ が正作用素なることから

$$0 \le T(|\zeta_0|-T)^{-1} \le 1+T(|\zeta_0|-T)^{-1} = |\zeta_0|(|\zeta_0|-T)^{-1}$$

となり $\varphi(|\zeta_0|)\geq 0$ である. $\varphi$ は $\zeta$ の連続函数であるから $\exists\,|\zeta|=|\zeta_0|$ で $\varphi(\zeta)=0$ のものがとれる. したがってこの $\zeta$ に関し $\exists\,0\le\theta\le 2\pi$

$$e^{i\theta}PT(\zeta-T)^{-1}P = P[\zeta(\zeta-T)^{-1}]P$$

となる. 作用素 $S := e^{i\theta}PT + (1-P)T$ を考えると

$$(\zeta-S)(\zeta-T)^{-1}P =$$

$$= P(\zeta-S)(\zeta-T)^{-1}P + (1-P)(\zeta-S)(\zeta-T)^{-1}P$$

$$= P(\zeta-e^{i\theta}T)(\zeta-T)^{-1}P + (1-P)(\zeta-T)(\zeta-T)^{-1}P = 0$$

となり, $\zeta$ は $S$ の固有値となる, したがって

$$|\zeta_0| = |\zeta| \le r(S).$$

一方 $|S|\le T$ より $|S|^n\le T^n$ がでて $r(S)\le r(T)$ となり $r(T)<|\zeta_0|$ から矛盾が出る. (終).

[定理 2] E が discrete で T が正作用素なら

$$|T(\zeta-T)^{-1}| \leqq |\zeta(\zeta-T)^{-1}| \qquad {}^\forall|\zeta|>r(T).$$

証明. $P_{cc}=0$ となり補題 2 の (b) が成立する.

[定理 3] T が compact な正作用素なら

$$|T(\zeta-T)^{-1}| \leqq |\zeta(\zeta-T)^{-1}| \qquad {}^\forall|\zeta|>r(T)$$

証明. 作用素

$$A := P_{cc}T|(\zeta-T)^{-1}| = P_c T|(\zeta-T)^{-1}|P_c$$

を考えると, T の compact 性より A も compact な正作用素となる. $P_J P_{cc} = P_{cc} P_J$ より $P_{cJ} A = 0$ なら補題 2 (b) が成立.

$P_J A \neq 0$ と仮定すると, 補題 1 から射影 $0 \neq P \leqq P_c$ と $\varepsilon>0$ があり $P_J A \geqq \varepsilon P$ となる. Banach 束 $F := P(E)$ で正作用素 $B := \varepsilon^{-1}PAP$ は compact で $B \geqq 1$ となる. F は atom をもたないから射影の列 $P_n$ で $P_n \neq 0$, $P_nP_m=0$ $(n\neq m)$ のものがある. $0 \leqq x_n \in P_n(F)$, $\|x_n\|=1$ のものをとると B の compact 性より, 必要なら部分列をとって, $Bx_n \to {}^\exists y$ (強収束) となる. 明かに $P_n y \to 0$ (弱収束) が成り立つから, $BP_n y \to 0$ (強収束) となる. 更に $B \geqq 1$ と $x_n \geqq 0$ から $x_n = P_n x_n \leqq P_n B x_n$ となる. したがって, $0 \leqq P_n y \leqq BP_n y$ をつかって,

$$1 = \|x_n\| \leq \|P_n B x_n\| \leq \|P_n y\| + \|P_n(Bx_n - y)\| \leq \|BP_n y\| + \|Bx_n - y\| \to 0$$

なる矛盾がでる. (終)

4. <u>あとがき</u> Banach 束に関連した問題の多くがそうであるように, 今とり上げている不等式も, E が (AM)空間または (AL)- 空間のときに証明できれば一般に成立することを示そう.

<u>(AM)-空間への reduction</u>. 任意に $0 \leq x_0 \in E$ および $|\zeta| > r(T) + \varepsilon$ を fix して, 不等式

$$|T(\zeta - T)^{-1}| x_0 \leq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| x_0$$

を示したいわけである. このため $\rho := r(T) + \varepsilon$ として $u := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} T^n x_0$ を考える. $u$ の生成する ideal $E_u := \{x \in E : |x| \leq {}^{\exists}\lambda u\}$ は norm $\|x\|_u := \inf\{\lambda : |x| \leq \lambda u\}$ で (AM)-空間になり, $0 \leq x_0 \leq u$ より $x \in E_u$ である. 明かに $Tu \leq \rho u$ より $T$ は $E_u$ を不変にする. $T$ の $E_u$ への restriction を $T_u$ とかくと $r(T_u) < |\zeta|$ であり $|T_u(\zeta - T_u)^{-1}| x_0 = |T(\zeta - T)^{-1}| x_0$, $|\zeta(\zeta - T_u)^{-1}| x_0 = |\zeta(\zeta - T)^{-1}| x_0$ となるから (AM)-空間 $E_u$ 上の作用素 $T_u$ に問題が reduce される.

(AL)-空間への reduction. E が (o)-連続な線形汎函数を充分多く許容する場合だけを考えよう。このときは不等式 $x \leq y$ は, $f(x) \leq f(y)$ $^\forall$(o)-連続 $f$, で特徴づけられる. したがって, 任意に $0 \leq x_0 \in E$, $0 \leq f \in E^*$ ((o)-連続) と $|\zeta| > r(T) + \varepsilon = \rho$ を fix して

$$f(|T(\zeta - T)^{-1}|x_0) \leq f(|\zeta(\zeta - T)^{-1}|x_0)$$

を示したいわけである. それで $f_0 := \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} T^{*n} f$ とし E に semi-norm $\|x\|_{f_0} := f_0(|x|)$ を入れると E は pre-(AL)-空間となり, $T_{f_0}$ はそこで連続であり $r(T_{f_0}) < |\zeta|$ となり (AL)-空間の場合に reduce される.

一般に E が (AL)-空間のときは全ての連続作用素 $S$ は (o)-有界になり $\|S\|_r = \|S\|$ である (cf. [2] p.232) したがって考えている不等式

$$|T(\zeta - T)^{-1}| \leq |\zeta(\zeta - T)^{-1}| \quad {}^\forall |\zeta| > r(T)$$

が成立すれば norm の不等式

$$\|T(\zeta - T)^{-1}\| \leq \|\zeta(\zeta - T)^{-1}\| \quad {}^\forall |\zeta| > r(T)$$

が成り立つ.

---

## 文献

[1] H. Nakano, Modern spectral theory, Maruzen, Tokyo, 1950

[2] H. H. Schaefer, Banach lattices and positive operators, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1974