数理解析研究所講究録
第290巻 1977年 30-41

単調作用素列の収束について

お茶の水女大 理 渡辺ヒサ子

§1. 序 $C([0\ 1])$ 上の positive linear operators の列 (L_n) の収束に関する Korovkin の定理と呼ばれる次の定理がある。すなわち、$g=1, =x, =x^2$ に対して、$(L_n g)$ が g に一様に収束すれば、どんな $f\in C([0\ 1])$ に対しても、$(L_n f)$ は f に一様に収束する。この定理はいろいろな形で一般化されているが、H. Bauer により次の形で一般化された。X を compact Hausdorff 空間とする。$(L_i)_{i\in I}$ を $C(X)$ から R^X (X 上の実数値関数全体からなる ordered vector space) への monotone mappings からなる net として、F は定数関数を含み、X の点を separate するような $C(X)$ の部分空間とする。そのとき、すべての $g\in F$ に対して $(L_i g)$ が g に pointwise (resp. uniformly) に収束すれば、どんな F-affine 関数 f に対しても、$(L_i f)$ は f に pointwise (resp. uniformly) に収束する。そのような f の集合 $\hat{F}$ が $C(X)$ と一致するための

必要かつ十分条件は、Fに関するChoquet境界がXと等しいことである（[1]）。また H. Bauer は局所compact空間においても、適当な条件のもとでは、収束を局所一様、又はorder収束にかえても、同様の結果が得られることを示している（[1], [2]）。

ここでは、特に順序に重きをおいて、ordered vector空間で考える。すなわち、Eをordered vector空間、Yを集合として、CはEのconvex coneとする。Cから$\mathbb{R}^Y$へのmonotone mapping（又はsublinear mapping）Aと、Eから$\mathbb{R}^Y$へのmonotone mappingsからなるnet $(L_i)_{i\in I}$に対して、$\overline{\lim}\, L_i g \leqq Ag\ (\forall g \in C)$ ならば、$(L_i f)$がある$Lf \in \mathbb{R}^Y$にpointwiseに収束するためのf、又はC, Aに対する条件、又はEのlinear subspace Fに対して、$\lim L_i g = Ag\ (\forall g \in F)$ ならば、$(L_i f)$はある$Lf \in \mathbb{R}^Y$にpointwiseに収束するための条件、さらに、pointwise収束を局所一様収束又はorder収束にして、同様の条件を考えたい。

§2. A(C)-境界, A(C)-affine関数. Eはordered vector空間, CはEに含まれるconvex coneでEはC^+-boundedとする。ここで、EがC^+-boundedであるというのは、どんな$f \in E$に対しても、$g \geqq 0$で$-g \leqq f \leqq g$

であるような $g\in C$ が存在することである。Yは集合として、AはCから$\mathbb{R}^Y$への写像とする。AがCで monotone であるというのは、

$$C\ni f,g,\ f\leqq g \Longrightarrow Af\leqq Ag,$$

が成り立つことである。Aが sublinear (resp. subadditive) であるというのは、次の(i)と(ii) (resp. (i)) を満足することである；

(i) $C\ni f,g \Longrightarrow A(f+g)\leqq Af+Ag$,

(ii) $C\ni f,\ \lambda\in\mathbb{R}^+ \Longrightarrow A(\lambda f)=\lambda Af$。

この§では、AはCから$\mathbb{R}^Y$への monotone, sublinear mapping とする。このとき、$E\ni f$と、$Y\ni y$に対して、

$$\overline{A}f(y)=\inf\{Ag(y);\ g\geqq f,\ g\in C\}$$

とおけば、$\infty>\overline{A}f(y)>-\infty$ であり、$\overline{A}f: f\mapsto \overline{A}f(y)$ はE上の sublinear functional である。$Y\ni y$に対して、

$$\mathfrak{M}_y=\{\mu\in E^{*+}:\ \mu(f)\leqq Ag(y),\ \forall g\in C\}$$

とおく。ここでE^{*+}はE上の positive linear functional の全体である。Hahn-Banach の拡張定理を使って、次の補題が得られる。

補題. $f\in E$と$y\in Y$に対して、

$$\overline{A}f(y)=\max\{\mu(f);\ \mu\in\mathfrak{M}_y\}$$

が成り立つ。

$\mathfrak{M}_y$ が一点集合となるような点 $y \in Y$ の集合を $\delta(A(C))$ で表わし、$A(C)$-境界と呼ぶことにする。

命題1. $y \in \delta(A(C))$ であるための必要かつ十分条件は、どの $f \in E$ に対しても、$\overline{Af}(y) = -\overline{A(-f)}(y)$ が成り立つことである。

Y 上で $\overline{Af} = -\overline{A(-f)}$ である $f \in E$ を $A(C)$-affine element と呼ぶ。このとき、次の系が得られる。

系. $\delta(A(C)) = Y$ であるための必要かつ十分条件は、どんな $f \in E$ も $A(C)$-affine であることである。

§3. 局所一様収束. Y は局所 compact Hausdorff 空間、E は ordered vector 空間で、C は E が C^+-bounded であるような E に含まれる convex cone とする。A は C から $C(Y)$ への sublinear mapping とする。E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net $(L_i)_{i \in I}$ と $S \subset Y$ に対して、$g \in E$ で S 上一様に $\overline{\lim} L_i g \leqq h$ であるというのは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、index $i_0 \in I$ で、どんな $i \geqq i_0$ でも

$$L_i g(y) < h(y) + \varepsilon \qquad (\forall y \in S)$$

を成り立たせるi_0が存在することである。また、どんなcompact集合Sに対しても、S上一様に$\overline{\lim} L_i g \leqq h$であるとき、$Y$上局所一様に$\overline{\lim} L_i g \leqq h$であるという。

定理1. (L_i)はEから$\mathbb{R}^Y$へのmonotone, subadditive mappingsからなるnetで、$L_i(0)=0$を満足するものとする。SはYのcompact部分集合とする。どんな$g \in C$に対しても、S上一様に$\overline{\lim} L_i g \leqq Ag$であれば、$S$上$\overline{A}f = -\overline{A}(-f)$であるような$f$に対して、$(L_i f)$は$S$上一様に$\overline{A}f$に収束する。

系1. どんな$g \in C$に対しても、Y上局所一様に$\overline{\lim} L_i g \leqq Ag$であれば、どんな$A(C)$-affine fに対しても$(L_i f)$は$\overline{A}f$にY上局所一様に収束する。

系2. Sは$\partial(A(C))$のcompact部分集合とする。どんな$g \in C$に対しても、S上一様に$\overline{\lim} L_i g \leqq Ag$であれば、どんな$f \in E$でも$(L_i f)$は$S$上一様に$\overline{A}f$に収束する。

さらに、FはEのlinear subspaceで、EはF-boundedとする。このときは、Fから$\mathbb{R}^Y$へのmonotone mapping Aに対して、

$$\overline{A}f(y) = \inf\{Ag(y);\ g \geqq f,\ g \in F\},$$

$$\underline{A}f(y) = \sup\{A\tilde{h}(y);\ h \leqq f,\ g \in F\}$$

が、$f \in E$ と $y \in Y$ に対して定義され、$\infty > \overline{A}f(y) > -\infty$, $\infty > \underline{A}f(y) > -\infty$ であり、$\underline{A}f(y) \leqq \overline{A}f(y)$ を満足する。

(L_i) は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net とするとき、次の定理と系1, 系2 が得られる。

定理2. A は F から $C(Y)$ への monotone mapping とする。任意の compact set $S \subset Y$ に対して、どんな $g \in F$ についても S 上一様に $\lim L_i g = Ag$ であれば、S 上で $\overline{A}f = \underline{A}f$ であるような $f \in E$ に対して、S 上一様に $\lim L_i f = \overline{A}f$ である。

系1. A は F から $C(Y)$ への monotone, subadditive mapping で $A(0) = 0$ を満足するものとする。どんな $g \in F$ に対しても Y 上局所一様に $\lim L_i f = \overline{A}f$ であれば、どんな $A(F)$-affine element f に対しても、Y 上局所一様に $\lim L_i f = \overline{A}f$ である。

系2. A は F から $C(Y)$ への positive linear mapping とする。$\delta(A(F))$ の compact 部分集合 S に対して、どの $g \in F$ についても S 上一様に $\lim L_i g = Ag$ であれば、どの $f \in E$ に対しても、S 上一様に $\lim L_i f = \overline{A}f$ である。

A は F から $C(Y)$ への positive linear mapping とする。次の性質を持つ $f \in E$ の全体を $S(F, A)$ で表わす：

E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなるどんな net (L_i) と F の任意の元 g に対して $(L_i g)$ が Ag に局所一様に収束すれば，$(L_i f)$ はある $L f \in \mathbb{R}^Y$ に局所一様に収束する。

E の部分集合 G より generate された linear subspace を $F(G)$ とするとき，$S(F(G), A) = E$ を満足すれば，G を A-Korovkin set と呼ぶ。

定理3. $S(F, A)$ は $A(F)$-affine elements の全体と等しい。

系. E が G^+-bounded であるような E の部分集合 G が A-Korovkin set であるための必要十分条件は，$Y = \delta(A(F(G)))$ が成り立つことである。

§4. pointwise 収束

E は ordered vector 空間で，C は E が C^+-bounded であるような E の convex cone とする。Y は集合として，A は C から $\mathbb{R}^Y$ への monotone, sublinear mapping とする。$(L_i)_{i \in I}$ は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net とする。このとき，Y に discrete

位相を入れることにより、Yは局所compact空間となり、一点集合はcompact setだから、定理1より、次の定理が成りたつ。

定理4. (L_i) はEから$\mathbb{R}^Y$への monotone, subadditive mappings からなる net で $L_i(0)=0$ を満足するものとする。SはYの部分集合とする。どんな$g\in C$に対してもS上で pointwise に $\overline{\lim} L_i g \leqq Ag$ であれば、S上 $\overline{Af}=-\overline{A(-f)}$ であるようなfに対して、$(L_i f)$ はS上で pointwise に$\overline{Af}$に収束する。

また、特にCが linear subspace Fになっているときには、定理2の type の pointwise 収束に関する結果も得られることは、明らかである。

§5. order収束. Yは集合として、$\mathbb{R}^Y$の linear subspace Bが $B=B^+-B^+$と書けたとする。ここで $B^+=B\cap\{f;\ f\geqq 0\}$ である。

$$B^b=\{f\in\mathbb{R}^Y;\ |f|\leqq h,\ \exists h\in B^+\}$$

とおき、$B\subset G\subset B^b$ であるような$\mathbb{R}^Y$の sub-vector lattice G 上の order位相 $T_o(G)$ とは、どんな order interval

$$\{ g' \in G ;\ -g \leqq g' \leqq g \} \quad (\forall g \in G^+)$$

を bounded にする最強の locally convex topology のことである.

$\mathbb{E}$ は B^+ から $(0, \infty)$ への関数の全体とするとき, $\mathbb{E} \ni \varepsilon$ に対して,

$$V_\varepsilon = \{ f \in B^b ;\ \exists h_1, \dots, h_r \in B^+,\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,$$
$$|f| \leqq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varepsilon(h_i) h_i \}$$

とおく. そのとき, 次の命題が成り立つ ([2, 1.1 Lemma]).

命題 2. $(V_\varepsilon \cap G)_{\varepsilon \in \mathbb{E}}$ は定数関数 0 の convex, symmetric 基本 $T_0(G)$-近傍系である.

Y は局所 compact 空間, B は $C(Y)$ の adapted linear space とする. すなわち, B は $C(Y)$ の linear subspace で, 次の条件(i), (ii), (iii) を満たすものとする:

(i) $B = B^+ - B^+$,

(ii) どんな $y \in Y$ に対しても, $f(y) > 0$ であるような $f \in B^+$ が存在する,

(iii) どんな $f \in B^+$ に対しても, 次の性質をもつ $g \in B^+$ がある: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{ y ;\ f(y) > \varepsilon g(y) \}$ は compact 集合である.

S は Y の開部分集合とする。$B^b(S)=\{f|S;\ f\in B^b\}$ とおく。そのとき $B_0(S)=B^b(S)\cap C(S)$ はやはり $C(S)$ の adapted 空間であり、$B_0(S)$ は $\mathbb{R}^S$ の sub-vector lattice である。そして、$B_0(S)$ の order 位相は $B^b(S)$ 上の order 位相により induce されたものである。$B_0(S)$ における net (f_α) がこの order 位相で f に収束するとき、(f_α) は f に S 上 order 収束するという。

H. Bauer による次の定理（[2, 2.1. Lemma]）は Dini の定理の局所 compact 空間への拡張である。

定理 5. $(g_i)_{i\in I}$ は $B_0(Y)$ の decreasing net で、どんな $y\in S$ に対しても $\inf_i g_i(y)=0$ とする。そのとき、$(g_i)_{i\in I}$ は S 上 0 に order 収束する。

E は ordered vector 空間、F はその linear subspace で、E は F^+-bounded とする。このとき、定理 5 を使って次の定理が得られる。

定理 6. Y は局所 compact 空間とする。A は E から $C(Y)$ への positive linear mapping で、F の A による像 $A(F)$ は $C(Y)$ の adapted space とする。$(L_i)_{i\in I}$ は E から $\mathbb{R}^Y$ への monotone mappings からなる net で、S は Y の開部分集合とする。このとき、どんな $g\in F$ に対しても

$(L_i g)$ は Ag に S 上で order 収束すれば、S 上で $\underline{Af} = \overline{Af}$ を満足するどんな $f \in E$ に対しても、$(L_i f)$ は Af に S 上 order 収束する。

この定理が成り立つから、定理と同じ仮定のもとで、定理2の系1,2で収束を order 収束に、Sを閉集合とした形の系も得られることは明らかである。

§6. 応用.

[3]で考えられた finite defined operators に関する Korovkin type の定理は、もっとゆるい条件のもとで、定理2の系を使うことにより簡単に証明される。すなわち、XとYは compact Hausdorff 空間で、Xは少くとも $n+1$ 個の要素を持つとする。$E = C(X)$ として、Eから$C(Y)$への positive linear mapping Aを

$$Af(y) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(y) f(\varphi_i(y)) \quad , \; f \in C(X),\; y \in Y,$$

と定義する。ここで、$\psi_i \in C^+(Y)$, φ_i は YからXへの連続写像とする。$C(X)$ の linear subspace Fは次の性質を持つものとする:

どんな異なる n 個の X の点 $x_1, \cdots, x_n$ についても、x_i 上では 0 $(1 \leq i \leq n)$, その他の点 x では $g(x) > 0$ と

なるような $g \in F$ が存在する．

このとき，$\delta(A(F)) = Y$ であることが簡単に証明されるから，定理2の系2により次の定理が成り立つ．

定理7．(L_i) は $C(X)$ から $C(Y)$ への monotone mappings からなる net とする．どんな $g \in F$ に対しても $(L_i g)$ が Ag に一様に収束すれば，どんな $f \in C(X)$ に対しても $(L_i f)$ は Af に一様に収束する．

参考文献

[1] H. Bauer, Theorems of Korovkin type for adapted spaces. Ann. Inst. Fourier 23, 245–260 (1973).

[2] H. Bauer, Convergence of monotone operators, Math. Z. 136, 315–330 (1974).

[3] A. S. Cavaretta, Jr., A Korovkin theorem for finite defined operators, Proc. Intern. Symp. on Approximation Theory (Univ. of Texas, Austin, Jan. 22–24), 299–305 (1973).