数理解析研究所講究録
第 290 巻 1977 年 57-75

Existence Theorems and Positive Operators

東工大 理学部 高橋 渉

いくつかの存在定理を証明する前に次のよく知られた２つの基本定理を述べておこう。

定理１（Brouwer の不動点定理）．X を n 次元空間の compact convex 集合とし，T を X から X への連続な写像とする。そのとき，X の中に T の不動点が存在する。

定理２（単位の分割定理）．X を compact Hausdorff 空間とし，$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ を $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ なる開集合の族とする。そのとき次の３つの条件をみたす X 上の n 個の実数値連続函数 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ が存在する。

(1) すべての $x \in X$ に対して $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

(2) すべての $x \in X$ に対して $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) = 1$.

(3) すべての $x \in G_i^c$ に対して $\beta_i(x) = 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

これらを用いて次の有用な不動点定理を得ることができる。

定理3．Xを線形位相空間Eのcompact convex集合としTを次の(1)と(2)をみたすXから2^Xへの写像とする。

(1) 任意の$x \in X$に対して$T(x)$はXの空でないconvex集合（あるいはXの開集合）である。

(2) 任意の$y \in X$に対して$T^{-1}(y) = \{x \in X ; y \in T(x)\}$は$X$の開集合（あるいは空でないconvex集合）である。

そのとき$x_0 \in T(x_0)$なる$x_0 \in X$が存在する。

証明．条件より，任意の$y \in X$に対して$T^{-1}(y)$はXの開集合であり，$X = \bigcup_{y \in X} T^{-1}(y)$である。$X$のcompactnessを使うと$X = \bigcup_{i=1}^{n} T^{-1}(y_i)$なるような$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$をうることができる。$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$をこのcoveringに対応する単位の分割とし，$X$から$X$へのmapping pを

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) y_i$$

で定義すると，すべての$x \in X$に対して$p(x) \in T(x)$である。なぜなら$x \in X$に対して$\beta_i(x) \neq 0$なら$x \in T^{-1}(y_i)$であり，それゆえ$y_i \in T(x)$である。ここで$T(x)$がconvex集合であることを使えば$p(x) \in T(x)$をうることができる。

X_0を$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$によってはられるfinite dimensional simplexとすると, p は X_0 から X_0 への continuous mapping であり, Brouwer の不動点定理を使うことによって $x_0 = p(x_0) \in T(x_0)$ なる $x_0 \in X_0 \subset X$ をうることができる。これで証明が完了した。

これから次の存在定理をうることができる。

定理4. X を線形位相空間 E の空でない compact convex 集合とし, A を次の性質をもつ $X \times X$ の部分集合とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対して 集合 $\{x \in X : (x, y) \in A\}$ は閉である。

(2) すべての $x \in X$ に対して $(x, x) \in A$ である。

(3) 任意の $x \in X$ に対して 集合 $\{y \in X : (x, y) \notin A\}$ は convex である。

そのとき $x_0 \times X \subset A$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

証明. 任意の $x \in X$ に対して $(x, y) \notin A$ なる $y \in X$ の存在を仮定する。いま $x \in X$ に対して

$$T(x) = \{y \in X : (x, y) \notin A\}$$

とおくとき, $T(x)$ は nonempty であり convex である。また $T^{-1}(y)$ は open であるので 定理3より $x_0 \in T(x_0)$ なる

$x_0 \in X$をうることができる。すなわち$(x_0, x_0) \notin A$である。これはすべての$x \in X$に対して$(x, x) \in A$であることに反する。これで$x_0 \times X \subset A$なる$x_0 \in X$の存在がわかる。

定理4の直接の結果として次の使いやすい定理をうる。

定理5. Xを線形位相空間Eのcompact convex集合としFを次の条件をみたす$X \times X$上の実数値函数とする。

(1) 任意の$y \in X$に対して，xの函数$F(x, y)$はupper semicontinuousである。

(2) 任意の$x \in X$に対して，yの函数$F(x, y)$はconvex函数である。

(3) すべての$x \in X$に対して$F(x, x) \geq c$である。

そのとき，すべての$y \in X$に対して$F(x_0, y) \geq c$なる$x_0 \in X$が存在する。

証明. いま$A = \{(x, y) \in X \times X : F(x, y) \geq c\}$とする。そのとき$A$は定理4の条件(1), (2), (3)をみたすことは明らかである。それゆえ$x_0 \times X \subset A$なる$x_0 \in X$をうることができる。すなわちすべての$y \in X$に対して$F(x_0, y) \geq c$である。

Xを線形位相空間Eのcompact convex集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$をX上のlower semicontinuousでconvexなn個の実数値函数とする。そのとき定理5を用いて次の定理をうる。

定理6. $f_i(x_0) \leq c \ (i=1, 2, \cdots, n)$をみたす$x_0 \in X$が存在する必要十分条件は$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$なるn個の非負な数$\alpha_i$に対していつでも$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y_0) \leq c$なる$y_0 \in X$が存在することである。

証明. 必要性は明らかである。十分性を証明する。もし，$f_i(x_0) \leq c \ (i=1, 2, \cdots, n)$なる$x_0 \in X$が存在しないとすると$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\} \ (i=1, 2, \cdots, n)$に対して$X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$である。いま開集合$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$に対応する単位の分割を$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$とし$X \times X$上の関数$F$を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると，Fは定理5の(1)，(2)をみたしており，さらにxの函数$F(x, x)$はlower semicontinuousであることより，すべての$x \in X$に対して$F(x, x) \geq c_0 > c$なる実数c_0の存在も容易にわかる。そこで定理5が使えてすべての$y \in X$に対して$F(x_0, y) \geq c_0 > c$なるような$x_0 \in X$の存在がわかる。すなわちすべての$y \in X$に対して$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) > c$と

なり，さらに $\sum_{i=1}^{m}\beta_i(x_0)=1$ となるような m 個の非負な数 $\{\beta_1(x_0), \beta_2(x_0), \cdots, \beta_m(x_0)\}$ が存在したことになる。これで証明が完了した。

定理5をもとに Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理の拡張を得る。

定理7. X を局所凸な線形位相空間 E の compact convex 集合とし，T を X から E への連続写像とする。そのとき次の (1) あるいは (2) が成立する。

(1) $Ty_0=y_0$ なる $y_0\in X$ が存在する。

(2) $0<p(x_0-Tx_0)=\min_{x\in X}p(x-Tx_0)$ なるような点 $x_0\in X$ と E 上の continuous seminorm p が存在する。

証明. (1) を否定しよう。すなわち任意の $x\in X$ に対して，$p_x(x-Tx)>0$ なる E 上の continuous seminorm p_x が存在するとしよう。そのとき

$$X=\bigcup_{x\in X}\{y\in X : p_x(y-Ty)>0\}$$

であり，X は compact なので

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}\{y\in X : p_{x_i}(y-Ty)>0\}$$

なる有限個の $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が存在する。いま $\{y\in X :$

$p_{x_i}(y-Ty)>0\}_{i=1}^{n}$ に対する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とし，$X\times X$ 上の函数 F を

$$F(x, y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(y-Tx)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(x-Tx)$$

とするとき，F は定理5の仮定(1)，(2)をみたし，さらに $x\in X$ に対して $F(x,x)=0$ である。それゆえ，定理5によってすべての $y\in X$ に対して $F(x_0, y)\geq 0$ なる $x_0\in X$ が存在する。すなわちすべての $y\in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(y-Tx_0)$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(x_0-Tx_0)>0$$

なる不等式が成立する。ここで $p=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}$ とするならば定理の(2)が得られる。

定理8．X を Banach 空間 B の compact convex 集合とし，T を X から B への連続函数とする。そのとき，

$$\|x_0-Tx_0\|=\min_{x\in X}\|x-Tx_0\|$$

なる $x_0\in X$ が存在する。

証明．$X\times X$ 上の函数 F を

$$F(x,y)=\|y-Tx\|-\|x-Tx\|$$

とおけば，定理5よりすべての $y\in X$ に対して

$\|y-Tx_0\|\geq\|x_0-Tx_0\|$ なる $x_0\in X$ をうることができる。

すなわち定理が証明されたことになる。

これらの存在定理をBanach space上の種々の linear operatorsの議論に応用するのがこの講究の目的である。まずはじめにBanach空間上に作用する compact operators の不変部分空間に関する Lomonosov の定理を Schauderの不動点定理と単位の分割定理のみによって論じよう。

定理9. Bを infinite complex Banach space (この定理のみ complex を仮定）とし，Aを0でないB上の compact operator とする。また $\mathcal{C}=\{C\in\mathcal{L}(B) : AC=CA\}$ とする。そのとき $\mathcal{C}$ のすべての operators に関して不変であるような B の nontrivial な closed subspace が存在する。

証明. 結論を否定しよう。すなわちすべての $C\in\mathcal{C}$ に対して $CX\subset X$ でありかつ $\{0\}\neq X\neq B$ なる B の closed subspace X が存在しないとしよう。そのとき $Au_0=\lambda u_0$ なる $u_0(\neq 0)$ が存在しないことがわかる。$Au_0=\lambda u_0$ なる $u_0(\neq 0)$

が存在したとして，$X=\{u\in B;\ Au=\lambda u\}$ とすると $X\neq\{0\}$ であり，すべての $C\in\mathfrak{C}$ に対して $CX\subset X$ である。ここで $B\neq X$ とすると仮定に反するので $B=X$ である。すなわち $u\in B$ なら $Au=\lambda u$ である。$\lambda=0$ なら $A=0$ となり仮定に反するし，$\lambda\neq 0$ なら $\lambda S_1(0)$ が compact となり B が infinite dim. であることに反する（ここで $S_r(z)=\{x\in B;\ \|x-z\|\leq r\}$ である）。これで $Au_0=\lambda u_0$ なる $u_0(\neq 0)$ の存在が否定された。

$\lambda=0$ は A の固有値でない。だから $u\neq 0$ なら $Au\neq 0$ となり，$\lambda\to\infty$ なら $\|A\lambda u\|\to\infty$ となる。また $\|x-y\|\leq 1$ なら $\|Ax-Ay\|\leq\|A\|$ なので，$\inf\{\|Ax\|;\ x\in S_1(x_0)\}>0$ なるような $x_0\in B$ の存在がわかる。いま $S_1(x_0)=S$ とかくと，任意の $y\in\overline{AS}$ に対して，$\|T_y y-x_0\|<1$ なる $T_y\in\mathfrak{C}$ が存在する。なぜならすべての $T\in\mathfrak{C}$ に対して $\|Ty-x_0\|\geq 1$ なるような $y\in\overline{AS}$ が存在したとする。X を $\{Ty;\ T\in\mathfrak{C}\}$ の closure とする。すると X は closed subspace で $\mathfrak{C}$ のもとで不変であり，$x_0\notin X$ より $\{0\}\neq X\neq B$ もわかる。これは仮定に反する。

いま $T\in\mathfrak{C}$ に対して $G_T=\{y\in\overline{AS};\ \|Ty-x_0\|<1\}$ とすると $\bigcup_{T\in\mathfrak{C}}G_T=\overline{AS}$ となる。$\overline{AS}$ が compact であることより $\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}\subset\mathfrak{C}$ が存在して $\bigcup_{i=1}^{n}G_{T_i}=\overline{AS}$ となる。

$\{G_{T_1}, G_{T_2}, \cdots, G_{T_n}\}$ に対応する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とし, $\overline{AS}$ から B への mapping Φ を

$$\Phi y \equiv \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) T_i y$$

で定義すると, $\Phi y \in S$ をうる。なぜなら $\beta_i(y) \neq 0$ は $y \in G_{T_i}$ を意味し, $\|T_i y - x_0\| < 1$ を意味する。ゆえに,

$$\|x_0 - \Phi y\| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) \|T_i y - x_0\| < 1$$

である。すなわち $\Phi y \in S$ をうる。だから $A\Phi(\overline{AS}) \subset \overline{AS}$ であり, Schauder の不動点定理を使うことによって $A\Phi y_0 = y_0$ なる $y_0 \in \overline{AS}$ をうる。この y_0 に対して,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y_0) T_i A$$

とすると, T は compact operator であり, $Ty_0 = y_0$ である。

いま $X_0 = \{x \in B ; Tx = x\}$ とすると, X_0 は finite dim. となる。故に $AX_0 \subset X_0$ から $Au_0 = \mu u_0$ なる $u_0 \in X_0$ $(u_0 \neq 0)$ の存在がわかる。これは A の固有ベクトルが存在しないことに反する。これで定理が証明された。

次に定理6を用いて Roberts の最近の結果を拡張してみよう。X を compact Hausdorff space とし $C(X)$ を X 上の連続函数全体が作る Banach space とする。$C(X)_+$ をその positive part とする。$M = \{\mu \in C(X)^* ; \|\mu\| = \mu(1) = 1\}$ とし, Σ を $C(X)$ 上の Markov operators が作る semigroup

としたとき，すべての$T\in\Sigma$に対して$\mu=T^*\mu$なる$\mu\in M$をΣ-invariantなprobability measureということにする。

定理10. 次の(1), (2), (3), (4)は同値である。

(1) X上のΣ-invariant probability measureが存在する。

(2) 任意の$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\in\Sigma^n$と$(f_1, f_2, \cdots, f_n)\in C(X)_+^n$に対して$\sum_{i=1}^n T_i f_i(x)\leq\sum_{i=1}^n f_i(x)$なる$x\in X$が存在する。

(3) 任意の$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\in\Sigma^n$と$\sum_{i=1}^{n+1} f_i=c$なる任意の$(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})\in C(X)_+^{n+1}$に対して

$$\sum_{i=1}^n T_i f_i(x)+f_{n+1}(x)\leq c$$

なる$x\in X$が存在する。

(4) 任意の$(T_1, T_2, \cdots, T_n)\in\Sigma^n$と$\sum_{i=1}^n T_i f_i+f_{n+1}=c$なる任意の$(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})\in C(X)_+^{n+1}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)\geq c$$

なる$x\in X$が存在する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2)は明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1). 任意の$T\in\Sigma$と$f\in C(X)_+$に対してM上の函数$F_{f,T}$を

$$F_{f,T}(\mu)=\mu(f-Tf)$$

で定義する。任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n)\in\Sigma^n$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_n)\in C(X)_+^n$ に対して (2) より

$$\sum \delta_x(T_i f_i)\leq \sum \delta_x(f_i)$$

なる $\delta_x\in M$ が存在するから定理6よりすべての $T\in\Sigma$ と $f\in C(X)_+$ に対して $\mu(Tf)\leq\mu(f)$ なる $\mu\in M$ の存在がわかる。また $\|f\|\cdot 1-f\geq 0$ なので

$$\mu(T(\|f\|\cdot 1-f))\leq\mu(\|f\|\cdot 1-f)$$

より $\mu(Tf)\geq\mu(f)$ がわかり, $\mu(Tf)=\mu(f)$ をうる。

(2) $\Rightarrow$ (3). $\sum T_i f_i(x)\leq\sum f_i(x)$ なる $x\in X$ が存在するとする。そのとき

$$\sum T_i f_i(x)+f_{n+1}(x)\leq\sum f_i(x)+f_{n+1}(x)=c$$

より (3) がいえたことになる。

(3) $\Rightarrow$ (2). 任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n)\in\Sigma^n$ と $(f_1, \cdots, f_n)\in C(X)_+^n$ に対し $c=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^n f_i(x)$ とし, $f_{n+1}=c-\sum_{i=1}^n f_i$ とすると, (3) より $\sum_{i=1}^n T_i f_i(x)+f_{n+1}(x)\leq c$ なる $x\in X$ の存在がわかる。それゆえ

$$\sum_{i=1}^n T_i f_i(x)\leq c-f_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)$$

なる $x\in X$ の存在がわかる。

(2) $\Rightarrow$ (4), (4) $\Rightarrow$ (2) も同様にわかる。

Σ が X から X への continuous mappings の semigroup である場合を考える。その前に Σ に対する normal base $\mathfrak{B}$ を定義する。X の open sets の族 $\mathfrak{B}$ が Σ に対する normal base であるとは，次の(1), (2), (3) が成り立つときである。

(1) $\mathfrak{B}$ は X の base である。

(2) $E \subset Q$ (E は closed set, Q は open set) に対して，$E \subset U \subset \overline{U} \subset Q$ なる $U \in \mathfrak{B}$ が存在する。

(3) $U \in \mathfrak{B}$ なら $T^{-1}U \in \mathfrak{B}$ $({}^{\forall}T \in \Sigma)$ である。

補助定理. $f \in C(X)_+$ と $\varepsilon > 0$ に対して $N \cdot \varepsilon > 2$ とする。そのとき，自然数 n と $\mathfrak{B}$ の finite subset $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ が存在して

$$f \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} 1_{U_i} \leq f + \varepsilon$$

である。

上の補助定理をもとにして次の定理をうる。

定理 11. 次の(1)と(2)は同値である。

(1) X 上の Σ-invariant probability measure μ が存在する。

(2) 任意の $(U_1, \cdots, U_n) \in \mathfrak{B}^n$ と $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ に対して $\sum_{i=1}^{n} 1_{T_i^{-1}U_i}(x) \geq \sum_{i=1}^{n} 1_{U_i}(x)$ なる $x \in X$ が存在する。

証明. (1) ⇒ (2). μ を Σ-inv. prob. measure とする。

$$\int \sum_{i=1}^{m} 1_{T_i^{-1}U_i}(x)\, d\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{m} 1_{U_i}(x)\, d\mu(x)$$

より $\sum_{i=1}^{m} 1_{T_i^{-1}U_i}(x) \geq \sum_{i=1}^{m} 1_{U_i}(x)$ なる $x \in X$ の存在がわかる。

(2) ⇒ (1). 任意の $(f_1, \cdots, f_m) \in C(X)_+^m$ と $(T_1, \cdots, T_m) \in \Sigma^m$ と $\varepsilon > 0$ に対して $N \cdot \frac{\varepsilon}{m} > 2$ とする。補助定理より任意の i に対して, $f_i \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m(i)} 1_{U_{ij}} \leq f_i + \frac{\varepsilon}{m}$ なる $\{U_{ij}\}_{j=1}^{m(i)} \subset \mathfrak{B}$ が存在する。だから $\sum_{i=1}^{m} f_i \leq \frac{1}{N} \sum_{ij} 1_{U_{ij}}$ である。また x のかわりに $T_i x$ を入れることにより, $\frac{1}{N} \sum_{ij} 1_{T_i^{-1}U_{ij}}(x) \leq \sum_{i=1}^{m} f_i(T_i x) + \varepsilon$ もうることができる。X は compact で, $\varepsilon (> 0)$ は任意なので

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(y) \leq \sum_{i=1}^{m} f_i(T_i y)$$

なる $y \in X$ の存在がわかる。定理 10 を用いて, X 上の Σ-inv. prob. measure の存在をうる。

最後に Tychonoff の不動点定理を用いて, mappings の族に対する不動点定理を証明する。この定理は Day の不動点定理の拡張にもなっている。X を compact Hausdorff space とし, $X \times X$ から X への mapping: $(x, y) \longrightarrow x \cdot y$ が continuous であるとする。このとき $(X, \cdot)$ を compact groupoid であると Roberts は名づけた。$(X, \cdot)$ から実

数全体Rへのmapping f が convex であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して $f(x \cdot y) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$ が成りたつときである。convex で continuous functions の全体を $\mathcal{C}$ であらわすことにする。また $x \cdot x = x$ なる $x \in X$ の全体を core$X$ であらわすことにする。

$\mu, \nu \in M = \{ \mu \in C(X)^* : \|\mu\| = \mu(1) = 1 \}$ に対して，

$$l(f) = \int f(x \cdot y)\, d\mu(x) \times \nu(y)$$

で $C(X)$ から R への mapping l を定義すると l は $l(1)=1$ をみたす norm-one linear functional である。$\varphi \in M$ を $l(f) = \int f\, d\varphi \ (\forall f \in C(X))$ をみたすものとし，ν と μ の convex convolution を $\varphi \equiv \mu * \nu$ で定義したとき，$S\mu \equiv \mu * \mu$ とすることにより，S は M から M への w^*-continuous mapping になる。

定理12. $(X, \cdot)$ を compact groupoid とし，$\mathcal{C}$ が X の点を分離するとする。また continuous mappings の semigroup Σ が次の条件をみたすとする。

(1) Σ-invariant probability measure をもつ。

(2) すべての $T \in \Sigma$ に対し，$T(x \cdot y) = Tx \cdot Ty \ (\forall x, y \in X)$ である。

そのとき すべての $T \in \Sigma$ に対して $Tx = x$ なる $x \in$ core$X$

が存在する。

証明. $T\in\Sigma$ に対して $\hat{T}f(x)=f(Tx)$ とする。

$M_0=\{\mu\in M : \hat{T}^*\mu=\mu,\ T\in\Sigma\}$ とすると M_0 は w^*-compact convex set である。

いま任意の $\mu\in M_0$ と $T\in\Sigma$ に対して,

$$\begin{aligned}\hat{T}^*S\mu(f)&=\int f(T(x\cdot y))\,d\mu\times\mu\\&=\int f(Tx\cdot Ty)\,d\mu\times\mu\\&=\int f(x\cdot y)\,d\mu\times\mu=S\mu(f)\end{aligned}$$

であるので, S は M_0 から M_0 への w^*-continuous mapping であることがわかる。ここで Tychonoff の不動点定理を用いることによって $S\mu=\mu$ なる $\mu\in M_0$ をうることができる。この μ に対して $\mu=\delta_x$ なることを証明する。その前に $X\times X$ の baire sets は $\mu\times\mu$-measurable であり, $f\in C(X\times X)$ は baire measurable であるので $\int f\,d\nu=\int f\,d\mu\times\mu$ なる $\nu\in M(X\times X)$ の存在がわかる。この ν と μ に対して,

$$\operatorname{supp}\nu\supset\operatorname{supp}\mu\times\operatorname{supp}\mu$$

となる。

$a, b\in\operatorname{supp}\mu\ (a\neq b)$ とする。との条件より,

$$f(a\cdot b)<\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$$

なる $f \in \mathcal{C}$ の存在がわかる。それゆえ,

$$\mu(f) = S\mu(f) = \int f(x\cdot y)\, d\mu\times\mu$$
$$< \int \left(\tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y)\right) d\mu\times\mu$$
$$= \int f\, d\mu = \mu(f)$$

となり矛盾をうる。だから $\mu = \delta_x$ なる $x \in X$ が存在する。いまこの x に対して $\delta_x = S\delta_x = \delta_x * \delta_x = \delta_{x\cdot x}$ であることより $x \in \mathrm{core}\,X$ もわかる。

上の定理より次の定理がただちにえられる。

定理13. X を局所凸な線形位相空間の compact convex subset とする。Σ を X から X への continuous, affine mappings からなる amenable semigroup とする。そのとき, $Tx = x$ $(\forall T \in \Sigma)$ なる $x \in X$ が存在する。

証明. $x\cdot y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ とすることにより $T(x\cdot y) = Tx\cdot Ty$ がわかり, Σ-invariant probability measure の存在は Σ の amenability よりわかる。それゆえ定理12が使えて定理の結論をうることができる。この場合における $\mathrm{core}\,X$ は X そのものである。

References

[1] F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. ann., 177 (1968), 283-301.

[2] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, Part I Interscience, New York (1958).

[3] M. M. Day, Amenable semigroups, Illinois J. Math, 1 (1957), 509-544.

[4] ———, Fixed point theorem for compact convex sets, Illinois J. Math., 5 (1961), 585-590.

[5] K. Fan, Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205-217.

[6] ——, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, Math. Ann., 163 (1966), 189-203

[7] ——, Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., 112 (1969), 234-240.

[8] P. R. Halmos, Measure theory, New York, Van

Nostrand, 1950.

[9] V. J. Lomonosov, Invariant subspaces for operators commuting with compact operators, Functional Anal. i Prilozen 7 (1973), 55–56.

[10] R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, New York, Van Nostrand, 1966.

[11] J. W. Roberts, Invariant measure in compact Hausdorff spaces, Indiana Univ. Math. J. 24 (1975), 691–718.

[12] ———, Representing measures in compact groupoids, To appear.

[13] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. of Japan 28 (1976), 168–181.

[14]. 高橋 渉, 不動点定理をめぐる最近の結果, 数学 28 (1976), 236–247.