数理解析研究所講究録
第290巻 1977年 76-97

線形半群の弱混合性について

東理大理工　　日合文雄

§0. 序論.

強混合性および弱混合性の概念は,保測変換の理論において重要な役割を果たしている. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を確率空間とし, τ を Ω 上の保測変換とする. $(Tf)(\omega) = f(\tau\omega)$ とおくと, T は $L_p(\Omega, \mu)$ $(1 \leqq p < \infty)$ 上の $\|T\| = 1$ なる正線形作用素となる. 任意の $F, G \in \mathcal{F}$ に対して, $\lim_{n \to \infty} \mu(F \cap \tau^{-n} G) = \mu(F)\mu(G)$ のとき, τ は強混合的であるといわれる. これは次の(a),(b)のいずれとも同値である. (b)との同値性は Blum-Hanson [3] の結果である.

(a) 任意の $f \in L_p$ に対して, $T^n f \xrightarrow{w} \langle f, 1 \rangle 1$,

(b) 任意の $f \in L_p$ と任意の $k_1 < k_2 < \cdots$ に対して,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^{k_i} f \xrightarrow{s} \langle f, 1 \rangle 1 .$$

他方, 任意の $F, G \in \mathcal{F}$ に対して, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\mu(F \cap \tau^{-k} G) - \mu(F)\mu(G)| = 0$ のとき, τ は弱混合的であるといわれる. これは次の(A),(B)のいずれとも同値である.

(A) 任意の $f \in L_p$ と $F \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |<T^k f - <f,1>1, 1_F>| = 0,$$

(B) 任意の $f \in L_p$ に対して，density 1 なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在して，$n \in J$, $n \to \infty$ のとき，$T^n f \xrightarrow{w} <f,1>1$.

混合性の概念は，上の (a), (b) および (A), (B) などを手がかりにして線形作用素へと一般化される．強混合性をエルゴード定理と関連付けたものとして，[3] の他に [4, 6] などがある．[12] では無限測度空間における変換に対して強混合性が考察された．L_1－空間上の線形作用素に対する強混合性は [13, 1, 2, 15, 5] などで考察された．とくに Akcoglu-Sucheston [1] の結果は [16, pp. 343-349] でも与えられている．他方，弱混合性を一般の Banach 空間上の線形作用素に拡張したものとして，[8, 9, 10, 14, 11] などがある．

この報告では，Banach 空間上の線形作用素からなる離散半群および1径数半群に対して，弱混合性に対応する種々の性質を導入する．これらには [8, 10, 14, 11] で与えられた性質の大部分が含まれており，またいくつかの新しい性質も含まれている．そしてこれらの性質の間の相互関係を統一的に考察する．この報告をまとめるにあたり，梅垣寿春教授にお世話になりました．ここに感謝いたします．

§1. 準備.

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ とし，J を $\mathbb{Z}^+$ の部分集合とする．J の元の個

数を$|J|$であらわす．<u>upper density</u> $ud(J)$ および <u>lower density</u> $ld(J)$ を次で定義する：

$$ud(J) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} |J \cap \{1, \dots, n\}|,$$

$$ld(J) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} |J \cap \{1, \dots, n\}|.$$

$ud(J) = ld(J)$ のとき，<u>density</u> $d(J)$ をその共通の極限で定義する．更に，<u>uniform upper density</u> $ud_*(J)$ および <u>uniform lower density</u> $ld_*(J)$ を次で定義する：

$$ud_*(J) = \limsup_{n\to\infty} \left[\sup_{j\geqq 0} \frac{1}{n} |J \cap \{j+1, \dots, j+n\}| \right],$$

$$ld_*(J) = \liminf_{n\to\infty} \left[\inf_{j\geqq 0} \frac{1}{n} |J \cap \{j+1, \dots, j+n\}| \right].$$

$ud_*(J) = ld_*(J)$ のとき，<u>uniform density</u> $d_*(J)$ をその共通の極限で定義する．

次に，$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ とし，A を $\mathbb{R}^+$ の Lebesgue 可測な部分集合とする．A の Lebesgue 測度を $|A|$ であらわす．<u>upper density</u> $UD(A)$，<u>lower density</u> $LD(A)$，<u>uniform upper density</u> $UD_*(A)$，<u>uniform lower density</u> $LD_*(A)$ を次で定義する：

$$UD(A) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} |A \cap (0, t]|,$$

$$LD(A) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} |A \cap (0, t]|,$$

$$UD_*(A) = \limsup_{t\to\infty} \left[\sup_{r\geqq 0} \frac{1}{t} |A \cap (r, r+t]| \right],$$

$$LD_*(A) = \liminf_{t\to\infty} \left[\inf_{r\geqq 0} \frac{1}{t} |A \cap (r, r+t]| \right].$$

$UD(A)=LD(A)$のとき，density $D(A)$をその共通の極限で定義する．また，$UD_*(A)=LD_*(A)$のとき，uniform density $D_*(A)$をその共通の極限で定義する．以下では，$\mathbb{R}^+$の部分集合はつねにLebesgue可測とする．

公式 $0 \leqq ld_*(J) \leqq ld(J) \leqq ud(J) \leqq ud_*(J) \leqq 1$, $ld(J)=1-ud(\mathbb{Z}^+ \setminus J)$, $ld_*(J)=1-ud_*(\mathbb{Z}^+ \setminus J)$ などは明らかである．また $ud(J)=0$ であるが $ud_*(J)=1$ となる $J \subset \mathbb{Z}^+$ が存在する．これらのことは $\mathbb{R}^+$ の densities に対しても同様である．

次の補題はよく知られており，証明は容易である：

補題 1.1. (1) $\{J_k\}$を$d(J_k)=1$なる$\mathbb{Z}^+$の部分集合の列とする．このとき，すべてのkに対して$J \setminus J_k$が有限である$d(J)=1$なる$J \subset \mathbb{Z}^+$が存在する．

(2) (α_n)を有界な実数列とするとき，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|=0$であるための必要十分条件は，$d(J)=1$なる$J \subset \mathbb{Z}^+$が存在して，$n \in J$, $n \to \infty$のとき，$\alpha_n \to 0$となることである．

同様にして次の補題を得る：

補題 1.2. (1) $\{A_k\}$を$D(A_k)=1$なる$\mathbb{R}^+$の部分集合の列とする．このとき，すべてのkに対して$A \setminus A_k$が有界である$D(A)=1$なる$A \subset \mathbb{R}^+$が存在する．

(2) φを$\mathbb{R}^+$上のLebesgue可測で有界な実函数とするとき，$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(s)|\,ds=0$であるための必要十分条件は，$D(A)=1$なる$A \subset \mathbb{R}^+$が存在して，$t \in A$, $t \to \infty$のとき，$\varphi(t) \to 0$となることである．

次の補題は簡単である:

補題 1.3. $A \subset \mathbb{R}^+$ と $\delta > 0$ に対して,

$$J = \{n \in \mathbb{Z}^+ : |A \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0\}$$

とおくとき, $ud(J) \geqq UD(A)$, $ld(J) \geqq LD(A)$, $ud_*(J) \geqq UD_*(A)$, $ld_*(J) \geqq LD_*(A)$ が成立する.

次の補題は [8, Lemma 3] を少し拡張したものである. 証明は [8] の証明において upper density を uniform upper density におきかえて得られる:

補題 1.4. $J, K \subset \mathbb{Z}^+$ で, $ud(J) = 1$, $ud_*(K) > 0$ とする. このとき, J の無限部分集合 $\{p_i\}$ で次の性質 (*) をもつものが存在する:

(*) 任意の n に対して, $\{p_1+k, \cdots, p_n+k\} \subset K$ を満たす $k \in \mathbb{Z}^+$ が無限個存在する.

実行列 $(\alpha_{nk})_{n,k \geqq 1}$ に対して, 次の条件をおく:

(1.1) $\sup_n \sum_k |\alpha_{nk}| < \infty$,

(1.2) $\lim_{n\to\infty} \sum_k \alpha_{nk} = 1$,

(1.3) $d(K) = 0$ なる任意の $K \subset \mathbb{Z}^+$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} |\alpha_{nk}| = 0$,

(1.4) $d_*(K) = 0$ なる任意の $K \subset \mathbb{Z}^+$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} |\alpha_{nk}| = 0$.

また, $\mathbb{R}^+$ 上の Lebesgue 可測な実函数列 $\{\varphi_n\}_{n \geqq 1}$ に対して, 次の条件をおく:

(1.5) $\sup_n \int_0^\infty |\varphi_n(t)|\, dt < \infty$, (1.6) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \varphi_n(t)\,dt = 1$,

(1.7) $D(B)=0$ なる任意の $B\subset \mathbb{R}^+$ に対して, $\lim_{n\to\infty}\int_B |\varphi_n(t)|\,dt = 0$,

(1.8) $D_*(B)=0$ なる任意の $B\subset \mathbb{R}^+$ に対して, $\lim_{n\to\infty}\int_B |\varphi_n(t)|\,dt = 0$.

§2. Banach 空間上の半群の弱混合性 (その1).

E を実または複素 Banach 空間とし, E^* をその双対空間とする. E 上の有界線形作用素の全体を $\mathcal{L}(E)$ であらわす. はじめに離散半群の場合を扱う. $T\in\mathcal{L}(E)$ とし, $x\in E$ に対して次の条件を考える:

$(\mathrm{i})_1$ $d(J)=1$ なる $J\subset\mathbb{Z}^+$ が存在して, $n\in J$, $n\to\infty$ のとき, $T^n x \xrightarrow{w} 0$;

$(\mathrm{ii})_1$ (1.1), (1.4) を満たす任意の (α_{nk}) に対して, $n\to\infty$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}T^k x \xrightarrow{s} 0$;

$(\mathrm{iii})_1$ (1.1), (1.3) を満たす任意の (α_{nk}) に対して, $n\to\infty$ のとき, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}T^k x \xrightarrow{s} 0$;

$(\mathrm{iv})_1$ $ld_*(K)>0$ なる任意の $K\subset\mathbb{Z}^+$ に対して,

$$\frac{1}{|K\cap\{j+1,\cdots,j+n\}|}\sum_{k\in K\cap\{j+1,\cdots,j+n\}} T^k x$$

が $n\to\infty$ のとき, $j\geq 0$ に関して一様に 0 に強収束する;

$(\mathrm{v})_1$ $ld(K)>0$ なる任意の $K\subset\mathbb{Z}^+$ に対して,

$$\frac{1}{|K\cap\{1,\cdots,n\}|}\sum_{k\in K\cap\{1,\cdots,n\}} T^k x$$

が $n\to\infty$ のとき, 0 に強収束する;

$(\mathrm{vi})_1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \sup_{\substack{\|x^*\|\leqq 1\\ j\geqq 0}}\ \frac{1}{n}\sum_{k=j+1}^{j+n}|\langle T^k x, x^*\rangle| = 0$;

$(\mathrm{vii})_1$ 任意の $x^*\in E^*$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\langle T^k x, x^*\rangle| = 0;$$

$(\mathrm{viii})_1$ $\{T^n x : n\in\mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が 0 を含む.

これらの条件に関して次の定理が成立する:

定理 2.1. $T\in\mathcal{L}(E)$ とし, $\sup\{\|T^n\| : n\in\mathbb{Z}^+\}<\infty$ とするとき, $x\in E$ に対して:

(1°) $(\mathrm{i})_1 \Rightarrow (\mathrm{ii})_1 \Rightarrow (\mathrm{iii})_1 \Rightarrow (\mathrm{iv})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{v})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{vi})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{vii})_1 \Rightarrow (\mathrm{viii})_1$.

(2°) $\{T^n x : n\in\mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が弱位相に関して距離付け可能ならば (とくに, $\{T^n x : n\in\mathbb{Z}^+\}$ が弱列的コンパクトならば), すべての $(\mathrm{i})_1$ ― $(\mathrm{viii})_1$ は同値である.

定理 2.1 の証明は, 次に述べる定理 2.2 と同様でありかつより容易であるので, 省略する.

次に 1 径数半群の場合を扱う. $\{T(t) : t\in\mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測な半群とし, $x\in E$ に対して次の条件を考える:

$(\mathrm{i})_2$ $D(A)=1$ なる $A\subset\mathbb{R}^+$ が存在して, $t\in A$, $t\to\infty$ のとき, $T(t)x \xrightarrow{w} 0$;

$(\mathrm{ii})_2$ (1.5), (1.8) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n\to\infty$ のとき, $\int_0^\infty \varphi_n(s)T(s)x\,ds \xrightarrow{s} 0$;

$(\mathrm{iii})_2$ (1.5), (1.7) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して，$n \to \infty$ のとき，
$\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s)\, ds \xrightarrow{s} 0$；

$(\mathrm{iv})_2$ $LD_*(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して，

$$\frac{1}{|B \cap (r, r+t]|} \int_{B \cap (r, r+t]} T(s) x\, ds$$

が $t \to \infty$ のとき，$r \geqq 0$ に関して一様に 0 に強収束する；

$(\mathrm{v})_2$ $LD(B) > 0$ なる任意の $B \subset \mathbb{R}^+$ に対して，

$$\frac{1}{|B \cap (0, t]|} \int_{B \cap (0, t]} T(s) x\, ds$$

が $t \to \infty$ のとき，0 に強収束する；

$(\mathrm{vi})_2$ $$\lim_{t \to \infty} \sup_{\substack{\|x^*\| \leqq 1 \\ r \geqq 0}} \frac{1}{t} \int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^* \rangle|\, ds = 0;$$

$(\mathrm{vii})_2$ 任意の $x^* \in E^*$ に対して，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\langle T(s)x, x^* \rangle|\, ds = 0;$$

$(\mathrm{viii})_2$ $\{T(t)x : t \in \mathbb{R}^+\}$ の弱閉包が 0 を含む．

これらの条件に関して次の定理が成立する：

<u>定理 2.2.</u> $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とし，$x \in E$ とするとき：

(1°) $(\mathrm{i})_2 \Longrightarrow (\mathrm{ii})_2 \Longrightarrow (\mathrm{iii})_2 \Longrightarrow (\mathrm{iv})_2 \Longleftrightarrow (\mathrm{v})_2 \Longleftrightarrow (\mathrm{vi})_2 \Longleftrightarrow (\mathrm{vii})_2 \Longrightarrow (\mathrm{viii})_2$．

(2°) ある $r > 0$ で $\{T(t)x : t \geqq r\}$ の弱閉包が弱位相で距離付け可能ならば（とくに，ある $r > 0$ で $\{T(t)x : t \geqq r\}$ が弱列的コンパクトならば），すべての $(\mathrm{i})_2$ — $(\mathrm{viii})_2$ は同値である．

定理2.2の証明の前に次の補題を与える:

補題2.3. $X \subset E$ が弱コンパクトかつ強可分ならば，弱位相に関して距離付け可能である.

証明. $X - X = \{x - y : x, y \in X\}$ の中で稠密な点列 $\{y_n\}$ をとる. 各 n に対して $\|y_n^*\| = 1$ かつ $\langle y_n, y_n^* \rangle = \|y_n\|$ を満たす $y_n^* \in E^*$ をとり，次のように定義する:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x - y, y_n^* \rangle|, \qquad x, y \in X.$$

すると，d は X 上の距離であり，それによる位相は弱位相より弱い，従って一致する. ∎

定理2.2の証明. $(\mathrm{i})_2 \Rightarrow (\mathrm{ii})_2$. $(\mathrm{ii})_2$ を否定すると，(1.5), (1.8) を満たす $\{\varphi_n\}$ ですべての n に対して $\|\int_0^\infty \varphi_n(s) T(s) x \, ds\| \geqq \varepsilon > 0$ となるものが存在する. φ_n のかわりに $\max(\varphi_n, 0)$ または $\max(-\varphi_n, 0)$ をとることができるから，すべての φ_n が非負であるとしてよい. $M = \sup\{\|T(t)\| : t \in \mathbb{R}^+\}$ とする. (1.8) を用いると，$\{\varphi_n\}$ の部分列 $\{\psi_n\}$ と数列 $0 < r_1 < t_1 < r_2 < t_2 < \cdots$ で次の2条件を満たすものがとれる:

$$(3.1) \qquad \int_0^{r_n} \psi_n(s) \, ds + \int_{t_n}^\infty \psi_n(s) \, ds < \frac{\varepsilon}{2M\|x\|},$$

$$(3.2) \qquad r_{n+1} > t_n + n.$$

すると，(3.1) により，すべての n に対して $\|\int_{r_n}^{t_n} \psi_n(s) T(s) x \, ds\| \geqq \varepsilon/2$. 各 n に対して $\|x_n^*\| = 1$ で

$$\int_{r_n}^{t_n} \psi_n(s) \, \mathrm{Re} \langle T(s) x, x_n^* \rangle ds \geqq \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $x_n^* \in E^*$ をとり,

$$B_n = \{ s : s \in (r_n, t_n],\ Re\langle T(s)x, x_n^* \rangle \geqq \beta \}$$

とおく. ただし $0 < \beta < \varepsilon / (4 \sup_{n \geqq 1} \int_0^\infty \psi_n(s)\,ds)$. すると,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\leqq \int_{B_n} \psi_n(s)\, Re\langle T(s)x, x_n^* \rangle\, ds \\ &\qquad + \int_{(r_n, t_n] \setminus B_n} \psi_n(s)\, Re\langle T(s)x, x_n^* \rangle\, ds \\ &\leqq M\|x\| \int_{B_n} \psi_n(s)\,ds + \beta \int_0^\infty \psi_n(s)\,ds. \end{aligned}$$

よってすべての n に対して $\int_{B_n} \psi_n(s)\,ds \geqq \varepsilon / 4M\|x\|$. かくて, $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ とおくと, (1.8) により, $UD_*(B) > 0$ を得る. さて, $A \subset \mathbb{R}^+$ を $(i)_2$ の中でとられたものとする. $T(t)x$ は $\mathbb{R}^+$ で強連続であり, 故に $t \geqq 1$ で一様強連続であるから, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $u, v \geqq 1$, $|u - v| < \delta$ に対して $\|T(u)x - T(v)x\| < \beta/2M$ となる. そこで次のように定義する:

$$J = \{ n : |A \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0 \},$$
$$K = \{ n : |B \cap ((n-1)\delta, n\delta]| > 0 \}.$$

すると補題 1.3 から, $d(J) = D(A) = 1$ かつ $ud_*(K) \geqq UD_*(B) > 0$. この J, K に対して, 補題 1.4 により, $1 + \delta^{-1} < p_1 < p_2 < \cdots$ なる $\{p_i\} \subset J$ で補題 1.4 の $(*)$ を満たすものがとれる. $u_i = p_i\delta - s_i \in A$ (ただし $0 \leqq s_i < \delta$) をとると, $T(u_i) \xrightarrow{w} 0$ だから, ある $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \geqq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ で, $\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(u_i)x\| < \beta/2M$ となる. (3.2) から, $\{p_1 + k, \cdots, p_N + k\} \subset K$ なる十分大きな k をとると, ある1つの n_0 に対して, $(p_i + k)\delta - t_i \in B_{n_0}$

(ただし $0 \leqq t_i < \delta$), $i=1,\cdots,N$ とすることができる．かくて，$v_i = k_i\delta - t_i$ とおけば，B_{n_0} の定義から，$\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i+k\delta)x\| \geqq \beta$ を得る．他方，$u_i, v_i \geqq 1$ かつ $|u_i - v_i| < \delta$ だから，

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i+k\delta)x\| &\leqq M\,\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(v_i)x\| \\ &\leqq M\left\{\|\sum_{i=1}^N \alpha_i T(u_i)x\| + \|\sum_{i=1}^N \alpha_i \bigl(T(u_i)-T(v_i)\bigr)x\|\right\} \\ &< \beta\end{aligned}$$

となり，矛盾が生じる．

(ii)$_2 \Rightarrow$ (iii)$_2$．明らか．

(iii)$_2 \Rightarrow$ (v)$_2$．$LD(B) > 0$ とし，$t_n \uparrow \infty$ とする．すべての n に対して $|B\cap(0,t_n]| > 0$ としてよい．$\{\varphi_n\}$ を

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B\cap(0,t_n]|}, & s \in B\cap(0,t_n], \\ 0, & s \notin B\cap(0,t_n], \end{cases}$$

で定義すると，$\{\varphi_n\}$ は (1.5), (1.7) を満たす．よって (iii)$_2$ により，

$$\int_0^\infty \varphi_n(s)T(s)x\,ds = \frac{1}{|B\cap(0,t_n]|}\int_{B\cap(0,t_n]} T(s)x\,ds$$

は 0 に強収束する．

(v)$_2 \Rightarrow$ (vii)$_2$．(vii)$_2$ を否定すると，$\|x^*\|=1$ なる $x^* \in E^*$ と $\varepsilon > 0$ と $t_n \uparrow \infty$ が存在して，

$$\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} |\langle T(s)x, x^*\rangle|\,ds \geqq \varepsilon, \qquad n \geqq 1.$$

そこで

$$B = \left\{s : |\langle T(s)x, x^*\rangle| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

とおくと，
$$\frac{1}{t_n}|B\cap(0,t_n]| \geqq \frac{\varepsilon}{2M\|x\|}, \qquad n\geqq 1.$$
故に $UD(B)>0$. かくて，もし必要なら x^* を $-x^*$, $\pm i x^*$ $(i=\sqrt{-1})$ のいずれかととりかえることにより，$UD(B')>0$ を得る．ただし
$$B'=\{s: Re\langle T(s)x, x^*\rangle \geqq \frac{\varepsilon}{4}\}.$$
そこで，$0<\beta<UD(B')$, $0<\delta<\varepsilon\beta/4M\|x\|$ をとり，$C=B'\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}(k,k+\delta]$ とおく．すると，$LD(C)>0$ であり，$\frac{1}{t}|B'\cap(0,t]|>\beta$ なる $t\in\mathbb{R}^+$ に対して，
$$\begin{aligned}
&\int_{C\cap(0,t]} Re\langle T(s)x, x^*\rangle ds \\
&\geqq \int_{B'\cap(0,t]} Re\langle T(s)x,x^*\rangle ds - \left|\int_{(C\setminus B')\cap(0,t]} Re\langle T(s)x,x^*\rangle ds\right| \\
&\geqq \frac{\varepsilon}{4}|B'\cap(0,t]| - M\|x\|\delta t \\
&\geqq \left(\frac{\varepsilon\beta}{4}-M\|x\|\delta\right)t \geqq \left(\frac{\varepsilon\beta}{4}-M\|x\|\delta\right)|C\cap(0,t]|.
\end{aligned}$$
これは $(\mathrm{V})_2$ が成立しないことを示す．

$(\mathrm{vii})_2 \Longrightarrow (\mathrm{vi})_2$. はじめに $\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|T(t)\|\leqq 1$ の場合を証明する．X^* を E^* の単位球とし，弱*位相によるコンパクト Hausdorff 空間として考える．$T(t)^*$ は X^* 上に作用する連続写像であり，
$$(\hat{T}(t)f)(x^*)=f(T(t)^*x^*), \quad x^*\in X^*, f\in C(X^*),$$
と定義すると，$\{\hat{T}(t): t\in\mathbb{R}^+\}$ は $C(X^*)$ 上の Markov 作用素

からなる弱連続従って強連続な半群となる. $f(x^*)=|\langle x, x^*\rangle|$ とおくと, $\hat{T}(t)^*\mu=\mu\ (t\in\mathbb{R}^+)$ なる任意の $\mu\in C(X^*)^*$ に対して,

$$\langle f, \mu\rangle = \langle \hat{T}(s)f, \mu\rangle$$
$$= \int_{X^*} |\langle T(s)x, x^*\rangle|\, d\mu(x^*), \qquad s\in\mathbb{R}^+.$$

よって Fubini の定理より,

$$\langle f, \mu\rangle = \int_{X^*} \left(\frac{1}{t}\int_0^t |\langle T(s)x, x^*\rangle|\, ds\right) d\mu(x^*).$$

従って $(\mathrm{vii})_2$ から $\langle f, \mu\rangle = 0$. これより, f は $\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{R}(I-\hat{T}(t))$ で生成される閉部分空間に属する. ただし $\mathcal{R}(I-\hat{T}(t))$ は $I-\hat{T}(t)$ の値域である. 故にエルゴード定理を用いると, $\frac{1}{t}\int_0^t \hat{T}(s)f\, ds \xrightarrow{s} 0$. すると,

$$\sup_{\substack{\|x^*\|\leqq 1\\ r\geqq 0}} \frac{1}{t}\int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^*\rangle|\, ds$$
$$= \sup_{r\geqq 0} \left\| \frac{1}{t}\int_r^{r+t} \hat{T}(s)f\, ds\right\|$$
$$= \sup_{r\geqq 0} \left\| \hat{T}(r)\left(\frac{1}{t}\int_0^t \hat{T}(s)f\, ds\right)\right\|$$
$$\leqq \left\|\frac{1}{t}\int_0^t \hat{T}(s)f\, ds\right\| \longrightarrow 0.$$

一般の場合は,

$$|||x||| = \max\left\{\|x\|, \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|T(t)x\|\right\}$$

とおくと, $|||\cdot|||$ は $\|\cdot\|$ と同値なノルムであり, $|||\cdot|||$ に関

して $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |||T(t)||| \leqq 1$ となる．よってはじめの場合に帰着する.

$(\mathrm{vi})_2 \Rightarrow (\mathrm{iv})_2$． 次の不等式より明らか：

$$\sup_{r\geqq 0} \frac{1}{|B\cap(r,r+t]|}\left\|\int_{B\cap(r,r+t]} T(s)x\,ds\right\|$$

$$\leqq \sup_{\substack{\|x^*\|\leqq 1\\ r\geqq 0}} \frac{t}{|B\cap(r,r+t]|}\ \frac{1}{t}\int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^*\rangle|\,ds$$

$$\leqq \left(\inf_{r\geqq 0} \frac{1}{t}|B\cap(r,r+t]|\right)^{-1} \sup_{\substack{\|x^*\|\leqq 1\\ r\geqq 0}} \frac{1}{t}\int_r^{r+t} |\langle T(s)x, x^*\rangle|\,ds.$$

$(\mathrm{iv})_2 \Rightarrow (\mathrm{v})_2$． $(\mathrm{v})_2$ を否定すると，$\beta = LD(B) > 0$ なる $B\subset\mathbb{R}^+$ と $\varepsilon > 0$ と $t_n \uparrow \infty$ が存在して，

$$\left\|\int_{B\cap(0,t_n]} T(s)x\,ds\right\| \geqq \varepsilon\,|B\cap(0,t_n]|, \qquad n\geqq 1.$$

$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}|B\cap(0,t_n]| \geqq \beta$ より，すべての n に対して，$\frac{1}{t_n}|B\cap(0,t_n]| \geqq \beta/2$ としてよい． $0<\delta<\varepsilon\beta/2M\|x\|$ をとり，$C = B\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}(k, k+\delta]$ とおくと，$LD_*(C) > 0$ で，

$$\left\|\int_{C\cap(0,t_n]} T(s)x\,ds\right\|$$

$$\geqq \left\|\int_{B\cap(0,t_n]} T(s)x\,ds\right\| - \left\|\int_{(C\setminus B)\cap(0,t_n]} T(s)x\,ds\right\|$$

$$\geqq \varepsilon\,|B\cap(0,t_n]| - M\|x\|\delta t_n$$

$$\geqq \left(\frac{\varepsilon\beta}{2} - M\|x\|\delta\right)t_n \geqq \left(\frac{\varepsilon\beta}{2} - M\|x\|\delta\right)|C\cap(0,t_n]|.$$

これは $(\mathrm{iv})_2$ に反する．

$(\mathrm{vii})_2 \Rightarrow (\mathrm{viii})_2$. 任意の $x_1^*, \cdots, x_n^* \in E^*$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$(\mathrm{vii})_2$ より，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^n |\langle T(s)x, x_i^*\rangle|\, ds = 0.$$

従って $\sum_{i=1}^n |\langle T(s)x, x_i^*\rangle| < \varepsilon$ を満たす $s \in \mathbb{R}^+$ が存在する．これより $(\mathrm{viii})_2$ が成立する．

以上により (1°) がすべて証明された．次に (2°) を証明する．$\{T(t)x : t \geqq r\}$ の弱閉包 X が弱位相で距離付け可能とする．$(\mathrm{viii})_2$ が成立するならば，$\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ が存在して $T(t_n)x \xrightarrow{w} 0$ となる．すると，上の $(\mathrm{vii})_2 \Rightarrow (\mathrm{vi})_2$ の証明のようにエルゴード定理を用いて $(\mathrm{vi})_2$ 従ってまた $(\mathrm{vii})_2$ を証明することができる．仮定より，任意の $\{x_j\} \subset X$ に対して，$x_j \xrightarrow{w} 0$ となるための必要十分条件がすべての k に対して $\langle x_j, x_k^*\rangle \longrightarrow 0$ $(j\to\infty)$ となることであるような点列 $\{x_k^*\} \subset E^*$ が存在する．各 k に対して $\frac{1}{t}\int_0^t |\langle T(s)x, x_k^*\rangle|\, ds \longrightarrow 0$ だから，補題 1.2 (2) より，$D(A_k) = 1$ なる $A_k \subset \mathbb{R}^+$ が存在して，$t \in A_k$，$t \to \infty$ のとき，$\langle T(s)x, x_k^*\rangle \longrightarrow 0$．そこで補題 1.2 (1) を用いれば，$(\mathrm{i})_2$ が得られる．最後に，(2°) のカッコの条件が成立する場合は，補題 2.3 より明らかである．▨

§3. Banach 空間上の半群の弱混合性（その2）．

§2 と同じく，E を Banach 空間とする．$T \in \mathcal{L}(E)$ に対して，次の条件を考える：

(I)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，任意の$x\in E$に対して，$d(J)=1$なる$J\subset\mathbb{Z}^+$がとれて，$n\in J$, $n\to\infty$のとき，$T^n x\xrightarrow{w}Qx$；

(II)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，(1.1), (1.2), (1.4)を満たす任意の(α_{nk})に対して，$n\to\infty$のとき，$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}T^k\xrightarrow{SOT}Q$（ただしSOTはstrong operator topologyをあらわす）；

(III)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，(1.1), (1.2), (1.3)を満たす任意の(α_{nk})に対して，$n\to\infty$のとき，$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{nk}T^k\xrightarrow{SOT}Q$；

(IV)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，$\ell d_*(K)>0$なる任意の$K\subset\mathbb{Z}^+$に対して，$n\to\infty$のとき，$j\geqq 0$に関して一様に，

$$\frac{1}{|K\cap\{j+1,\cdots,j+n\}|}\sum_{k\in K\cap\{j+1,\cdots,j+n\}}T^k\xrightarrow{SOT}Q;$$

(V)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，$\ell d(K)>0$なる任意の$K\subset\mathbb{Z}^+$に対して，$n\to\infty$のとき，

$$\frac{1}{|K\cap\{1,\cdots,n\}|}\sum_{k\in K\cap\{1,\cdots,n\}}T^k\xrightarrow{SOT}Q;$$

(VI)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，任意の$x\in E$に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{\|x^*\|\leqq 1\\ j\geqq 0}}\frac{1}{n}\sum_{k=j+1}^{j+n}|\langle(T^k-Q)x,x^*\rangle|=0;$$

(VII)$_1$ $Q\in\mathcal{L}(E)$が存在して，任意の$x\in E$と$x^*\in E^*$に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\langle(T^k-Q)x,x^*\rangle|=0;$$

(VIII)$_1$ $TQ=Q$を満たすQが$\{T^n:n\in\mathbb{Z}^+\}$のWOT (weak operator topology)による閉包の中に存在する.

$\{T(t): t\in\mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とする. $\mathbb{R}^+$ 上の Lebesgue 可積分な実函数 φ に対して, 積分 $\int_0^\infty \varphi(t)T(t)\,dt \in \mathcal{L}(E)$ を次により定義できる:

$$\left(\int_0^\infty \varphi(t)T(t)\,dt\right)x = \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt, \quad x\in E.$$

とくに, 有界な $A\subset\mathbb{R}^+$ に対して, $\int_A T(t)\,dt \in \mathcal{L}(E)$ が定義される. そこで次の条件を考える:

$(\mathrm{I})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x\in E$ に対して, $D(A)=1$ なる $A\subset\mathbb{R}^+$ がとれて, $t\in A$, $t\to\infty$ のとき, $T(t)x \xrightarrow{w} Qx$;

$(\mathrm{II})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.5), (1.6), (1.8) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n\to\infty$ のとき, $\int_0^\infty \varphi_n(s)T(s)\,ds \xrightarrow{SOT} Q$;

$(\mathrm{III})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, (1.5), (1.6), (1.7) を満たす任意の $\{\varphi_n\}$ に対して, $n\to\infty$ のとき, $\int_0^\infty \varphi_n(s)T(s)\,ds \xrightarrow{SOT} Q$;

$(\mathrm{IV})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, $LD_*(B)>0$ なる任意の $B\subset\mathbb{R}^+$ に対して, $t\to\infty$ のとき, $r\geqq 0$ に関して一様に,

$$\frac{1}{|B\cap(r,r+t]|}\int_{B\cap(r,r+t]} T(s)\,ds \xrightarrow{SOT} Q;$$

$(\mathrm{V})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, $LD(B)>0$ なる任意の $B\subset\mathbb{R}^+$ に対して, $t\to\infty$ のとき,

$$\frac{1}{|B\cap(0,t]|}\int_{B\cap(0,t]} T(s)\,ds \xrightarrow{SOT} Q;$$

$(\mathrm{VI})_2$ $Q\in\mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x\in E$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{\substack{\|x^*\|\leq 1\\ r\geqq 0}}\ \frac{1}{t}\int_r^{r+t} |\langle (T(s)-Q)x, x^*\rangle|\,ds = 0;$$

$(\mathrm{VII})_2$ $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して，任意の $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t |\langle (T(s)-Q)x,\ x^*\rangle|\,ds = 0;$$

$(\mathrm{VIII})_2$ すべての $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)Q = Q$ を満たす Q が $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ の WOT による閉包の中に存在する．

以上の条件に関して，定理 2.1，2.2 の結果を，各 $x \in E$ で $x - Qx$ に対して適用すれば次の定理 3.1，3.2 が得られる：

__定理 3.1.__ $T \in \mathcal{L}(E)$ とし，$\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ とするとき：

(1°) $(\mathrm{I})_1 \Rightarrow (\mathrm{II})_1 \Rightarrow (\mathrm{III})_1 \Rightarrow (\mathrm{IV})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{V})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{VI})_1 \Leftrightarrow (\mathrm{VII})_1 \Rightarrow (\mathrm{VIII})_1$.

(2°) 任意の $x \in E$ に対して，$\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の弱閉包が弱位相に関して距離付け可能ならば（とくに，$\{T^n\}$ が weakly almost periodic，すなわち，WOT で相対コンパクトならば），すべての $(\mathrm{I})_1$ — $(\mathrm{VIII})_1$ は同値である．

__定理 3.2.__ $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とするとき：

(1°) $(\mathrm{I})_2 \Rightarrow (\mathrm{II})_2 \Rightarrow (\mathrm{III})_2 \Rightarrow (\mathrm{IV})_2 \Leftrightarrow (\mathrm{V})_2 \Leftrightarrow (\mathrm{VI})_2 \Leftrightarrow (\mathrm{VII})_2 \Rightarrow (\mathrm{VIII})_2$.

(2°) 任意の $x \in E$ に対して，ある $r > 0$ で，$\{T(t)x : t \geqq r\}$ の弱閉包が弱位相で距離付け可能ならば（とくに，ある $r > 0$ で $\{T(t) : t \geqq r\}$ が weakly almost periodic ならば），すべての $(\mathrm{I})_2$ — $(\mathrm{VIII})_2$ は同値である．

注意. (1) Eが可分のときは上の$(\mathrm{I})_1$, $(\mathrm{I})_2$ はそれぞれ次の条件におきかえることができる:

$(\mathrm{I}')_1$ $d(J)=1$ なる $J \subset \mathbb{Z}^+$ と $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $n \in J$, $n \to \infty$ のとき, $T^n \xrightarrow{WOT} Q$;

$(\mathrm{I}')_2$ $D(A)=1$ なる $A \subset \mathbb{R}^+$ と $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, $t \in A$, $t \to \infty$ のとき, $T(t) \xrightarrow{WOT} Q$.

(2) Stegall [17] によれば, E^* が Radon-Nikodym property をもつための必要十分条件は, Eの任意の可分な部分空間が可分な双対空間をもつことである. 従ってこれを仮定した場合, 定理 3.1, 3.2 の (2°) の仮定が成立する. とくに E が回帰的な場合は, (2°) のカッコの仮定が成立する.

次の2つの定理の証明は容易であるので省略する:

定理 3.3. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ は定理 3.2と同様であるとし, $r \in \mathbb{R}^+$ とする. このとき $(\mathrm{VII})_2$ が成立するための必要十分条件は次の2つが成立することである:

(1) $T(r)x = x$ ならば, 任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)x = x$,

(2) $T(r)$ に対して $(\mathrm{VII})_1$ が成立する, すなわち, $Q \in \mathcal{L}(E)$ が存在して, 任意の $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\langle (T(ir) - Q)x, x^* \rangle| = 0.$$

定理 3.4. $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ を $\mathcal{L}(E)$ の中の強可測かつ一様有界な群とする. このとき, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ に対して $(\mathrm{VII})_2$ が

成立することと，$\{T(-t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ に対して $(\mathrm{VII})_2$ が成立することは同値である．

離散的な場合にも，定理 3.3，3.4 と同様な結果が成立する．

§4. AL−空間上の半群の弱混合性．

この節では，E を AL−空間とする，すなわち，測度空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ がとれて $E = L_1(\Omega, \mu)$．$\mathcal{L}_+(E)$ を E 上の正線形作用素の全体とする．次の定理 4.1，4.2 は，σ−有限な測度空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ で $E = L_1(\Omega, \mu)$ の場合に，[7] で与えられた．$(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ が一般の測度空間の場合，任意の $x \in L_1(\Omega, \mu)$ に対して，次の２条件を満たす $\Omega_0 \in \mathfrak{F}$ が存在する：(1) μ は Ω_0 上で σ−有限，(2) $T L_1(\Omega_0, \mu) \subset L_1(\Omega_0, \mu)$ [または，任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して，$T(t) L_1(\Omega_0, \mu) \subset L_1(\Omega_0, \mu)$]．従って，σ−有限の場合に帰着する．

<u>定理 4.1.</u> $T \in \mathcal{L}_+(E)$ とし，$\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}^+\} < \infty$ のとき，次の条件は同値である：

(a) 任意の $x \in E$ に対して，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i x$ は強収束する；

(b) 任意の $x \in E$ に対して，$\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ の凸閉包の中に，$T x_0 = x_0$ なる x_0 が存在する；

(c) 任意の $x \in E$ に対して，$\{T^n x : n \in \mathbb{Z}^+\}$ は弱列的コンパクトである．

<u>定理4.2.</u> $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$ を $\mathcal{L}_+(E)$ の中の強可測かつ一様有界な半群とするとき，次の条件は同値である：

(a) 任意の $x \in E$ に対して，$t \to \infty$ のとき，$\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds$ は強収束する；

(b) 任意の $x \in E$ に対して，$\{T(t)x : t \in \mathbb{R}^+\}$ の凸閉包の中に，すべての $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)x_0 = x_0$ となる x_0 が存在する；

(c) 任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対して，$\{T(t)x : t \geqq r\}$ は弱列的コンパクトである.

定理3.1, 3.2 と定理4.1, 4.2 とを合わせれば，次は明らかである：

<u>定理4.3.</u> 定理4.1 におけるような $T \in \mathcal{L}_+(E)$ に対して，§3 の $(\mathrm{I})_1$ — $(\mathrm{VIII})_1$ はすべて同値である.

<u>定理4.4.</u> 定理4.2 におけるような $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{L}_+(E)$ に対して，§3 の $(\mathrm{I})_2$ — $(\mathrm{VIII})_2$ はすべて同値である.

文　　献

[1] M. Akcoglu and L. Sucheston, On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space, Periodica Math. Hungaric 2 (1972), 235 - 244.

[2] M. Akcoglu and L. Sucheston, On convergence of iterates of positive contractions in L_p spaces, J. Approximation Theory 13 (1975), 348 - 362.

[3] J. R. Blum and D. L. Hanson, On the mean ergodic theorem for subsequences, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 308 - 311.

[4] A. Brunel and M. Keane, Ergodic theorems for operator sequences, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 12 (1969), 231 - 240.

[5] H. Fong and L. Sucheston, On a mixing property of operators in L_p spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 28 (1974), 165 - 171.

[6] D. L. Hanson and G. Pledger, On the mean ergodic theorem for weighted averages, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 13 (1969), 141 - 149.

[7] F. Hiai and R. Sato, Mean ergodic theorems for semigroups of positive linear operators, J. Math. Soc. Japan 29 - 1 (1977).

[8] L. K. Jones, A mean ergodic theorem for weakly mixing operators, Advances in Math. 7 (1971), 211 - 216.

[9] L. K. Jones, An elementary lemma on sequences of integers and its applications to functional analysis, Math. Z. 126 (1972), 299 - 307.

[10] L. K. Jones, A generalization of the mean ergodic theorem in Banach spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 27 (1973), 105 - 107.

[11] L. K. Jones and M. Lin, Ergodic theorems of weak mixing type, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 50 - 52.

[12] U. Krengel and L. Sucheston, On mixing in infinite measure spaces, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 13 (1969), 150 - 164.

[13] M. Lin, Mixing for Markov operators, Z. Wahrscheinlichkeits-theorie und Verw. Gebiete 19 (1971), 231 - 242.

[14] R. J. Nagel, Ergodic and mixing properties of linear operators, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 74 (1974), 245 - 261.

[15] R. Sato, On Akcoglu and Sucheston's operator convergence theorem in Lebesgue space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 513 - 516.

[16] H. H. Schaefer, Banach Lattices and Positive Operators, Springer, Berlin, 1974.

[17] C. Stegall, The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 213 - 223.