数理解析研究所講究録
第 290 巻 1977 年 110-120

von Neumann algebras の continuous fields について

東北大 教養 武元英夫

M を finite von Neumann algebra, Z を M の center, Ω を Z の spectrum space とする。M から Z への $\natural$-operation $\natural$ に対して, M のすべての maximal ideals は Ω の元に対応して完全に決定されることは良く知られている。すなわち, $\omega \in \Omega$ に対して,

$$m_\omega = \{a \in M : (a^*a)^\natural(\omega) = 0\}$$

は M での maximal ideal であって, M での maximal ideal は上の形で完全に決定される。さらに, maximal ideal m_ω に対して, quotient algebra M/m_ω が finite factor になることは Sakai [1] によって示されている。maximal ideal による quotient algebra が von Neumann algebra になるということを示した Sakai の結果の拡張として次の Takesaki [3] の定理がある。

定理1. M を finite von Neumann algebra, $\mathcal{Z}$ を M の center, A を $\mathcal{Z}$ の von Neumann algebra とする。A の spectrum space を Ω とおく。$\mathcal{E}$ を次の性質を満す M から A 上への σ-weakly continuous な linear mapping とする。

(i) $\mathcal{E}(x^*x) = \mathcal{E}(xx^*) \geq 0$ for $\forall x \in M$, $= 0 \rightleftarrows x = 0$,

(ii) $\mathcal{E}(ax) = a\mathcal{E}(x)$ for $\forall a \in A$, $\forall x \in M$,

(iii) $\mathcal{E}(1) = 1$

各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$\mathfrak{m}_\omega = \{ x \in M : \mathcal{E}(x^*x)(\omega) = 0 \}$$

とすると, $\mathfrak{m}_\omega$ は M での closed two-sided ideal で quotient algebra $M/\mathfrak{m}_\omega$ は finite von Neumann algebra となる。さらに, M から $M/\mathfrak{m}_\omega$ への canonical homomorphism を π_ω としたとき, A を含む任意の M の von Neumann subalgebra N に対して $\pi_\omega(N)$ は $M/\mathfrak{m}_\omega$ の von Neumann subalgebra となる。

議論を進める前に, $\mathcal{Z}$ が σ-finite のときは上のような $\mathcal{E}$ が存在することを示しておく。この $\mathcal{E}$ が本講演では重要な役割を演じている。M が finite von Neumann algebra であるから定理1の(i), (ii), (iii)の性質を満す M から $\mathcal{Z}$ への $\natural$-operation が存在している。従って, $\mathcal{Z}$ から A への σ-weakly continuous, faithful な norm one の projection の存在について示せば

よい。$\mathcal{Z}$がσ-finiteであるので，φを$\mathcal{Z}$上のfaithful normal stateとする。しかも，φによるMのcyclic representationを考えることによって，MはHilbert space $\mathcal{H}$上にactしていてしかも$\varphi(x)=(x\xi_0|\xi_0)$ for $\forall x\in\mathcal{Z}$となるcyclic vector ξ_0をもっていると仮定して十分である。Hから$[A\xi_0]$へのprojectionをeとすると，Aがabelian von Neumann algebraであるから，eはA'でのabelian projectionとなっている。しかも，$A'\supset\mathcal{Z}'=\mathcal{Z}\supset A$より，$e$の$A'$でのcentral supportは1である。したがって，$eA'e$とAは$*$-isomorphicである。

$$\theta\ ;\ eA'e\to A\ ,*\text{-isomorphic},\quad \theta(xe)=x\ \text{ for }\forall x\in A$$

そこで，$\varepsilon_{\mathcal{Z}}(x)=\theta(exe)$ for $\forall x\in\mathcal{Z}$とおくと，$\varepsilon_{\mathcal{Z}}$はもとめるものとなっている。

定理1に対応して，von Neumann algebrasのcontinuous fieldsを使った考え方がTakemoto and Tomiyama [2]によって与えられた。すなわち，それらは次の様な考え方で進められた。

M, $\mathcal{Z}$, A, Ω, εは全て定理1と同じものとする。$\mathcal{L}(M,A)$をMからAへのbounded linear mapping全体からなるBanach spaceとする。上に与えられたεは$\mathcal{L}(M,A)$

の元となっている。特に，bounded A-module homomorphism となっている。そこで，$a\in M$に対して $\varepsilon_a(x) \equiv \varepsilon(ax) = \varepsilon(xa)$によって ε_aを定義すると，ε_a はMからAへの σ-weakly continuous A-module homomorphism となっている。$\{\varepsilon_a : a\in M\}$ の $\mathcal{L}(M,A)$ での closure をVとすると，各$\Phi\in V$はMからAへのσ-weakly continuous なA-module homomorphismである。しかも，各$a\in M$に対して，$\mathcal{L}(M,A)$での linear mapping L_a, R_a を

$$(L_a\Phi)(x) \equiv \Phi(ax), \quad (R_a\Phi)(x) = \Phi(xa)$$

によって定めると，

$$L_a V\subset V, \quad R_a V\subset V$$

となっている。ここで，各$\omega\in\Omega$ に対して，

$$\mathfrak{m}_\omega = \{a\in M : \varepsilon(a^*a)(\omega) = 0\}$$

とおくと，$\mathfrak{m}_\omega$ はMでの closed ideal となり，

$$\mathfrak{m}_\omega = \{a\in M : \Phi(a)(\omega) = 0 \text{ for } {}^\forall\Phi\in V\}$$

となっている。したがって，

$$\pi_\omega : M\ni a \longrightarrow a(\omega)\in M/\mathfrak{m}_\omega$$

とすると，$\Phi\in V$ に対して，$\Phi(\mathfrak{m}_\omega)\subset \mathfrak{m}_\omega\cap A$, $a\in M$をもってくると，$|\Phi(a)(\omega)| \leqq \|\Phi\|\cdot\|a(\omega)\|$ となっている。これから，$\Phi\in V$ に対して

$$\Phi(\omega)(a(\omega)) \equiv \Phi(a)(\omega)$$

によって$\Phi(\omega)$を定めると，$\Phi(\omega)$は$M(\omega)=M/m_\omega$上のbounded linear functionalとなっている。

$$V(\omega)\equiv\{\Phi(\omega)\,;\,\Phi\in V\}$$

は$M(\omega)^*$でのinvariant subspaceである。さらに，次の性質が示される。

(1) 各$\Phi\in V$に対して，関数$\omega\to\|\Phi(\omega)\|$は$\Omega$上の連続関数である。

実際，各$\Phi\in V$に対してMの元u (unitary element) が存在して，すべての$\omega\in\Omega$に対して，$\|\Phi(\omega)\|=\Phi(u)(\omega)$となっている。

(2) 各$\omega\in\Omega$に対して，$V(\omega)$は$M(\omega)^*$でのclosed subspaceとなっている。

実際，ρをVから$V(\omega)$へのcanonical mappingとすると，ρからinduceされる$V/\ker\rho$から$V(\omega)$へのmapping $\hat{\rho}$がisometryとなっている。

これから，$V(\omega)$は$M(\omega)^*$でのclosed invariant subspaceとなる。したがって，$V(\omega)^*=M(\omega)^{**}/V(\omega)^\circ$は$V(\omega)$をpredual spaceとしてもつvon Neumann algebraとなる。とくに，$M(\omega)^{**}/V(\omega)^\circ$が$M(\omega)$と一致することが示される。したがって，$M(\omega)$は$V(\omega)$をpredual spaceとしてvon Neumann algebra

となる。

以上のことから，von Neumann algebras と predual spaces からなる field $\{M(\omega), V(\omega) : \omega \in \Omega\}$ が von Neumann algebra M と σ-weakly continuous A-module homomorphisms の set V の pair $\{M, V\}$ から構成される。しかも，上に示されている様に，$a \in M$, $\Phi \in V$ に対して，$\omega \to \Phi(\omega)(a(\omega))$ は Ω 上の連続関数となっている。このことから，

$$W(\Omega, M(\omega), V(\omega))$$

$$\equiv \{a = \{a(\omega)\} : a(\omega) \in M(\omega), \omega \in \Omega, \omega \to \Phi(\omega)(a(\omega)) \text{ は連続}, \Phi \in V, \omega \to \|a(\omega)\| \text{ は有界}\}$$

とおくと，$W(\Omega, M(\omega), V(\omega))$ は M と等距離写像で同型となる。

次に今までの field と subalgebras への restriction について考えよう。

N を M の C^*-subalgebra，$N(\omega) \equiv \pi_\omega(N)$ とおく。$\Phi \in V$ に対して $\Phi|N$, $\Phi(\omega)|N(\omega)$ をそれぞれ Φ, $\Phi(\omega)$ の N, $N(\omega)$ への restriction を表わす。

定理1より，N を A を含む M の von Neumann subalgebra とする。そのとき，$N(\omega)$ は $M(\omega)$ の von Neumann subalgebra となっている。これから，任意の $\Phi \in V$ に対して，

$$\omega \longrightarrow \|\Phi(\omega)|N(\omega)\|$$

は Ω 上の連続関数となる．

これは，Mの von Neumann subalgebras に対する性質であるが，これを C^*-subalgebra について考えると次の結果が得られる。

<u>定理2</u>. NはAを含むMの C^*-subalgebraである．そのとき，$\omega_0 \in \Omega$ に対して，次は同値である．

(1) $\widetilde{N(\omega_0)} = \tilde{N}(\omega_0)$

(2) 各 $\Phi \in V$ に対して，関数 $\omega \longrightarrow \|\Phi(\omega)|N(\omega)\|$ は点 ω_0で連続である。

ここで $\tilde{N}$ はNの σ-weak closure を表わす。

定理1，定理2 の性質を C^*-subalgebraで考えた場合にはどうなるかということを，具体的なもので考えてみよう．

M を σ-finite, finite von Neumann algebra, τ をM上の faithful normal trace とする．

$$\mathfrak{A} \equiv \{a = (a_n) : \text{Mの元からなる bounded sequence}\}$$
$$= \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$$

とすると，$\mathfrak{A}$ は finite von Neumann algebra であって，$\mathfrak{A}$の center は $\mathcal{A} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ を含んでいる。τを用いて，$\mathfrak{A}$から $\mathcal{A}$ への mapping ε を次のように定義する。

$$\mathcal{E}(a) \equiv (\tau(a_n)) \qquad \text{for } {}^\forall a = (a_n) \in \mathfrak{A}$$

そのとき，$\mathcal{E}$に対して定理1での(i),(ii),(iii)が満される。$\mathbb{N}$のStone-Čech compactificationを$\beta\mathbb{N}$としておく。$n \in \mathbb{N}$に対して，$\mathfrak{m}_n = \{a = (a_n) : \tau(a_n^* a_n) = 0\} = \{a \in \mathfrak{A} : \mathcal{E}(a)(n) = 0\}$は$\mathfrak{A}$でのclosed idealで$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_n$はvon Neumann algebraである。特に，$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_n \cong M$となっている。$\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$に対しては，$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\omega)$を$\omega$のall neighborhoodsからなるfilterとする。それに対して，

$$\mathfrak{m}_\omega = \{a = (a_n) \in \mathfrak{A} : \lim_{\mathfrak{U}} \tau(a_n^* a_n) = 0\}$$

とおく。すると，定理1の結果より，$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$はfinite von Neumann algebraとなる。そこで，$\mathcal{B}$を$\mathfrak{A}$での$\mathcal{A}$を含むC*-subalgebraとする。そのとき，定理2と$\{n\}$が孤立集合であることから，$\mathcal{B}(n) = \widehat{\mathcal{B}(n)}$は成立する。しかし，$\mathcal{B}(n) = \widehat{\mathcal{B}(n)}$はかならずしも成立しない。それは，後で述べる系からも簡単にわかる。しかし，$\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$に対しては，この性質が成立することは次の定理で示される。

<u>定理3</u>．Mをσ-finite, finite von Neumann algebraとする。τをM上のfaithful normal traceとする。$\mathfrak{A} = \ell^\infty(\mathbb{N}, M)$, $\mathcal{A} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$とおき，各$\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$に対して$\omega$のすべての近傍からなるfilterを$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\omega)$とおく。その

とき，

$$\mathfrak{m}_\omega = \{ a=(a_n) \in \mathfrak{A} : \lim_{\omega} \tau(a_n^* a_n) = 0 \}$$

に対して，$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ は finite von Neumann algebra となる。$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ への canonical homomorphism を π_ω とおく。

$\mathcal{A}$ を含む $\mathfrak{A}$ の C^*-subalgebra $\mathcal{B}$ に対して，$(\mathcal{B})_n = \{a_n : a=(a_n) \in \mathcal{B}\}$ とおくと $(\mathcal{B})_n$ は M の C^*-algebra であるが，今，$\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n) = \{a=(a_n) \in \mathfrak{A} : a_n \in (\mathcal{B})_n$ for $^\forall n\}$ のとき，$\pi_\omega(\mathcal{B})$ は $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ の von Neumann subalgebra となる。

定理3で $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ を含む C^*-subalgebra としたときは $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ となるとは限らない。しかし，各 n に対して，M での C^*-subalgebra $\mathcal{B}_n$ with the identity を与えたとき，$\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{B}_n)$ に対して，$(\mathcal{B})_n = \mathcal{B}_n$ であって $\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ が成立している。$\mathcal{B}$ が von Neumann subalgebra のときは，$\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ がいつも成立している。

<u>定理3の証明</u>。$\mathcal{B}$ の σ-weak closure を $\hat{\mathcal{B}}$ とおくと定理2と $\{n\}$ が $\beta\mathbb{N}$ での孤立集合であることから，$(\hat{\mathcal{B}})_n = \widehat{(\mathcal{B})_n}$ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立している。しかも，$\mathcal{B} = \ell^\infty(\mathbb{N}, (\mathcal{B})_n)$ であるから，$\hat{\mathcal{B}} = \ell^\infty(\mathbb{N}, \widehat{(\mathcal{B})_n})$ が成立する。

したがって，Kaplansky の density theorem によって，任意の $a=(a_n)\in\widehat{\mathcal{B}}$ に対して次の性質を満す sequence $b=(b_n)$ が存在する。

(i) $b_n\in(\mathcal{B})_n$ for $\forall n$ (ii) $\tau((a_n-b_n)^*(a_n-b_n))<\frac{1}{n}$

(iii) $\|b_n\|\leqq\|a_n\|$ for $\forall n$

そのとき，$a=(a_n)$ は bounded sequence であるから $b=(b_n)$ も bounded sequence である。しかも，(i) と $\mathcal{B}=\ell^\infty(\mathbb{N},(\mathcal{B})_n)$ より $b=(b_n)\in\mathcal{B}$ となっている。(iii) から

$$\lim_{\omega}\tau((a_n-b_n)^*(a_n-b_n))=0$$

であるから $\pi_\omega(a)=\pi_\omega(b)$ となる。

ゆえに，$\pi_\omega(\widehat{\mathcal{B}})=\pi_\omega(\mathcal{B})$ であって，定理1から $\pi_\omega(\widehat{\mathcal{B}})$ は $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ での von Neumann subalgebra であるから，$\pi_\omega(\mathcal{B})$ が $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ での von Neumann subalgebra となる。

系. A は Hilbert space H 上に act している C^*-algebra with the identity である。A の weak closure $\widehat{A}=M$ が σ-finite, finite von Neumann algebra になるとする。そのとき，M 上の faithful normal trace を τ とおいて，定理3と同じく，$\mathfrak{m}_n=\{a=(a_n)\in\mathfrak{A}:\tau(a_n^*a_n)=0\}$，

$$\mathfrak{m}_\omega=\{a=(a_n)\in\mathfrak{A}:\lim_{\omega}\tau(a_n^*a_n)=0\}$$

を定める。ただし，$\mathfrak{A}=\ell^\infty(\mathbb{N},A)$ とする。そのとき，各

n に対して，$\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_n \cong A$，$\omega \in \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ に対しては $\mathfrak{A}/\mathfrak{m}_\omega$ は von Neumann algebra となる。

[1] S. Sakai : Yale University, Lecture Note, 1962.

[2] H. Takemoto and J. Tomiyama ; Tôhoku Math. Journ., 25 (1973), 273-289.

[3] M. Takesaki ; Pacific Journ. Math., 36 (1971), 827-831.