

無限次元非推移的 Lie 群

京大 理学部 木曾和啓

無限次元 Lie 群は、推移的な場合には、Singer-Sternberg 氏をはじめとしていろいろの研究があり、単純群や primitive な群の分類もなされている。また、非推移的な場合には、最近森本 [3] によって、ある種の formal algebra が決定された。ここでは、非推移的 Lie 群に対する構造方程式や、単純群の分類に関係した問題などを考察する。

§1. M, N を (C^∞) 多様体、 $f: M \rightarrow N$ を (C^∞) 写像とする。 f が上への写像で、またその rank が各点で N の次元に等しい時、 $f: M \rightarrow N$ を fibered manifold という。 X が M 上のベクトル場のとき、 $J_r^f(X)$ で X の $x \in M$ における r 階の jet を表わす。また、 $J_r(TM)$ で M の接バンドルの r 階の jet bundle を表わす。

M を多様体、 \mathfrak{L} を M 上の L. A. S. (Lie algebra sheaf) とする。即ち、 \mathfrak{L} は M 上のベクトル場からなる sheaf だ。

bracket で閉じているものである。

$$R_{\mathbb{R}} = \bigcup_{x \in M} \{j_x^{\mathbb{R}}(X) \mid X \in \mathcal{L}_x\} \subset J_{\mathbb{R}}(TM)$$

とおく。ここで、 \mathcal{L}_x は x 上の stalk。

定義 1 次の条件が成り立つ時、 \mathcal{L} を C.L.A.S. (continuous L.A.S.) と行う。

(1) fibered manifold $p: M \rightarrow N$ が存在して、

$$R_0 = \{X \in TM \mid p_* X = 0\} \text{ が成り立つ。}$$

(2) $\forall x$ について $R_{\mathbb{R}}$ は M 上の vector bundle。

(3) 次の条件をみたす自然数 k_0 が存在する: M 上の (local) ベクトル場 X は、 $j_x^{k_0}(X) \in R_{\mathbb{R}}$ が任意の x について成り立つ時 \mathcal{L} の section である。

M を複素多様体、 \mathcal{L} を M 上の正則ベクトル場からなる LAS とする。複素解析的な範囲で考えた定義 1 の各条件が成り立つ時、 \mathcal{L} を複素解析的 LAS と呼ぶ。

\mathcal{L} を CLAS とする。推移的な場合、つまり N が一点のときは、 \mathcal{L} は適当な G 構造の無限小変換からなる LAS とみることができ、非推移的な場合にも同じように議論するためには、 G -構造という概念を拡張する必要がある。そのような構造は Tanaka によって定義され、すでに同型問題が解かれている。(〔6〕参照) まず、それについて述べる。

$p: M \rightarrow N$ を fibered manifold, $m = \dim M$, $n = \dim N$

としよう。 $V = \mathbb{R}^m$ 。また V の m -次元部分空間 W をとり固定する。 $\pi: F(M) \rightarrow M$ を M の frame bundle とする。よく知られているように、 M の変換 φ は $F(M)$ の変換 $\tilde{\varphi}$ を誘導する。

即ち、 $p \in F(M)$ 、 $v \in V$ のとき、 $\tilde{\varphi}(p)(v) = \varphi_* p(v)$ 。同様に、 M 上のベクトル場 X は $F(M)$ 上に持ち上げることができる。それを \tilde{X} で表わす。また、 $A \in \mathfrak{gl}(V)$ に対して、 $GL(V)$ の右作用から導かれる $F(M)$ 上のベクトル場を A^* で表わす。

次のように定義する。

$$F(M, N) = \{ p \in F(M) \mid p(W) = R_0, \pi(p) \}$$

$$GL(V, W) = \{ a \in GL(V) \mid a(W) = W \}$$

$$GL(V, W)^\# = \{ a \in GL(V, W) \mid a(v) \equiv v \pmod{W}, v \in V \}$$

$GL(V, W)$ は $F(M, N)$ の構造群で、また、 $GL(V, W)^\#$ の Lie 環は $W \otimes V^*$ に等しい。容易に分るように、その linear isotropy algebra は、適当な同一視のもとで $W \otimes V^*$ の subalgebra である。

$(W \otimes V^*) \times N$ を N 上の自明な vector bundle とみて、 \mathfrak{g} をその subbundle とする。 $t \in N$ 上の fiber を $\mathfrak{g}(t)$ で表わす。各 $t \in N$ に対して、 $\mathfrak{g}(t)$ が Lie 環の時、 \mathfrak{g} を $W \otimes V^*$ の N -subalgebra と呼ぶ。

定義 2 \mathfrak{g} を $W \otimes V^*$ の N -subalgebra とする。 $F(M, N)$ の部分多様体 P が次の条件をみたすとき、 P を \mathfrak{g} -structure

という。

(1) $\pi: P \rightarrow M$ は fibered manifold。

(2) $A \in \mathfrak{gl}(V, W)$, $p \in P$ のとき、 A_p^* が P に接する事と $A \in \mathfrak{g}(t)$ は同値である。ここで、 $t = f(\pi(p))$ 。

P を \mathfrak{g} -structure とする。 $f(\pi(p)) = f(\pi(q))$ であるような任意の $p, q \in P$ に対して、次の性質をもつ M の局所的な変換 φ と、 p の P における近傍 U が存在すると仮定しよう。

即ち、 $f \circ \varphi = f$, $\tilde{\varphi}(U) \subset P$ かつ $\tilde{\varphi}(p) = q$ 。このとき、 P を N -transitive という。

はじめに帰って、 \mathcal{L} を M 上の CLAS としよう。 $p \in F(M, N)$

($\pi(p) = x$) に対して、 $T_p F(M, N)$ の部分空間 D_p を

$D_p = \{ \tilde{X}_p \mid X \in \mathcal{L}_x \}$ と定義する。そうすると、 $D = \bigcup D_p$ は

完全積分可能な distribution になる。 $f: M \rightarrow N$ の断面 $\dot{x}(t)$ ($t \in N$)、及び $f \circ \pi: F(M, N) \rightarrow N$ の断面 $\dot{p}(t)$ を、

$\pi(\dot{p}(t)) = \dot{x}(t)$ となるように選ぶ。以下の議論は全く局所的

だから、 M, N を適当な開集合でとり替る事によって、そのような断面が存在すると仮定する。 $\dot{p}(t)$ を通る D の積分多様

体を $\mathcal{D}_{\dot{p}(t)}$ で表わそう。 $\bigcup_t \mathcal{D}_{\dot{p}(t)}$ は一般には多様体でないの

で、 $\mathcal{D}_{\dot{p}(t)}$ において $\dot{p}(t)$ の十分小さな近傍をとり、それらの和集合を P とする。近傍を十分小にとれば、 P は多様体であると思つてよい。次の定理は容易に分る。

定理1 P は N -transitive な \mathcal{G} -structure である。

M 上のベクトル場 X は、 \tilde{X} が P に接する時、 P の無限小自己同型といわれる。 P の無限小自己同型からなる LAS を $\mathcal{L}(P)$ で表わすと、 P の定義から、 $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(P)$ である。したがって、 \mathcal{L} を P にもち上げる事によって、 P 上に CLAS $\mathcal{L}^{(1)}$ ができる。 $\mathcal{L}^{(1)}$ に対して上と同じ事をしてやると、ある \mathcal{G}_1 と、 \mathcal{G}_1 -structure P_1 が存在して、 $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(P_1)$ となる。以下同様にして、一般に bundle の列

$$M \longleftarrow P \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2 \longleftarrow \dots$$

ができるが、定義1の(3)を使うと、 \mathcal{L} が存在して $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P_e)$ であることが、推移的な場合と同様にして証明できる。詳細は省略する。

§2. $p: M \rightarrow N$ を fibered manifold. $P \subset F(M, N)$ を N -transitive な \mathcal{G} -structure とする。以下で、 P の structure function を定義する。まず、 $p \in P$ ($p(\pi(p)) = t$) のとき、 $\tilde{p}_t: V \rightarrow T_t N$ を、 $\tilde{p}_t(v) = p_* P(v)$ で定義すると、 N -transitive という仮定から、 \tilde{p}_t は p のとり方によらない。次に、 θ を $F(M)$ の基本形式としよう。即ち、 θ は $F(M)$ 上の V に値をもつ 1-form で、次式で定義

される: $\theta_p(X) = p^{-1}(\pi_* X)$, $X \in T_p F(M)$. θ の P 上の制限も同じ記号で表す. $p \in P$ に対して, $T_p P$ の部分空間 H を, $\theta: H \rightarrow V$ が bijective であるように選ぶ. したがって, $v \in V$ に対して, $\theta(v_H) = v$ となるような $v_H \in H$ が唯一存在する. この時, $c_H \in V \otimes \wedge^2 V^*$ を, $c_H(v, w) = d\theta(v_H, w_H)$ と定義しよう. $V \otimes \wedge^2 V^* / \delta(\mathfrak{g}(t) \otimes V^*)$ における c_H の類 $c(p) = [c_H]$ は, H のとり方によらない. ここで, $t = p(\pi(p))$. また δ の定義については [4] 参照. \tilde{f} 及び c を, それぞれ P の \mathcal{O} -種, \mathcal{O} -種 structure function と呼ぶ. (cf. [6]) $p, q \in P$ で $p(\pi(p)) = q(\pi(q))$ であれば, N -transitive という仮定から, $c(p) = c(q)$ が成り立つ事も容易に分る. $t \in N$ のとき, $(p \circ \pi)^{-1}(t)$ 上の共通の値を $c(t)$ で表す.

次に, 構造方程式を示すために少し準備する. まず, \mathfrak{g} は Lie 環の変形だから, その無限小変形を次の様に定義することができる. $A \in \mathfrak{g}(t)$ に対して, \mathfrak{g} の断面 σ で $\sigma(t) = A$ となるものをとる. $v \in V$ の時, $\tau_v: \mathfrak{g}(t) \rightarrow W \otimes V^* / \mathfrak{g}(t)$ を

$$\tau_v(A) \equiv \tilde{f}_t(v) \sigma \quad \text{mod } \mathfrak{g}(t)$$

で定義しよう. 右辺は, σ を $W \otimes V^*$ に値をもつ N 上の関数とみて, それにベクトル $\tilde{f}_t(v) \in T_t N$ を作用させる事を意味している. 上の式が σ のとり方によらない事も, 容易に確かめることができる. また, τ_v は cocycle である.

$([\tau_v] \in H^1(\mathfrak{g}(t), W \otimes V^* / \mathfrak{g}(t))) \quad A \in \mathfrak{g}(t)$ のとき.

$\tau(A) \in W \otimes V^* / \mathfrak{g}(t) \otimes V^*$ を, $\tau(A)(v) = \tau_v(A)$ で定義する. $\delta\tau(A)$ は, $W \otimes \Lambda^2 V^* / \delta(\mathfrak{g}(t) \otimes V^*)$ の元として意味をもっている.

前に注意したように, ρ は $V \otimes \Lambda^2 V^* / \delta(\mathfrak{g} \otimes V^*)$ に値をもつ N 上の関数であるが, これは一般には vector bundle ではない. (ここで V, V^* などは N 上の自明な vector bundle とみなしている.) しかし, $V \otimes \Lambda^2 V^*$ に値をもつ N 上の関数 $\underline{\rho}$ で, 各 t に対し, $\underline{\rho}(t) \in \rho(t)$ となるようなものは存在する. $\underline{\rho}$ に対して, $V \otimes \Lambda^2 V^* \otimes V^*$ に値をもつ関数 $\underline{\rho}$ を, $\underline{\rho}(v) = \tilde{\rho}(v) \underline{\rho}$ で定義しよう. 自然な写像 $V \otimes \Lambda^2 V^* \otimes V^* \rightarrow V \otimes \Lambda^3 V^*$ による $\underline{\rho}$ の像を $\hat{\rho}$ とする.

$\mathfrak{g}(t)$ の $V \otimes \Lambda^2 V^* / \delta(\mathfrak{g}(t) \otimes V^*)$ 上への自然な表現を σ で表わす. また, $\underline{\rho} \in V \otimes \Lambda^2 V^*$ に対し, $\sigma(\underline{\rho}) \in V \otimes \Lambda^3 V^*$ を

$$\sigma(\underline{\rho})(v_1, v_2, v_3) = \sigma \underline{\rho}(\underline{\rho}(v_1, v_2), v_3)$$

で定義する. ここで, $v_i \in V$, σ は v_i に関する symmetric sum を意味する.

次の定理を得る.

定理 2 (構造方程式)

(1) $A \in \mathfrak{g}(t)$ のとき, $A \circ \rho(t) + \delta\tau(A) = 0$.

(2) $\sigma(\underline{\rho}(t)) + \hat{\rho}(t) \in \delta(\mathfrak{g}(t) \otimes \Lambda^2 V^*)$.

推移的な場合には $\tau = \hat{\rho} = 0$ だから, 上式は [4] の構造

方程式に帰着する。

§3 L を M 上の CLAS, $f: M \rightarrow N$ を定義 1 における fibered manifold とする。 L の断面は各 fiber $f^{-1}(t)$ に接しているから, L は $f^{-1}(t)$ 上に推移的 LAS を誘導する。それを $L(t)$ で表わそう。この節では, ある $0 \in N$ が存在して, $A = L(0)$ が単純な時に, L を決定する問題を考える。本質的には, さらに次のように仮定する事ができる: A は, 無限次元の時は primitive, 有限次元の時は simply transitive. すると, 局所的には, A は次のうちのいずれかである。

- ① $L_{gl}(W, R)$ 全てのベクトル場からなる CLAS。
- ② $L_{sl}(W, R)$ 体積を不変にするベクトル場からなる CLAS。
- ③ $L_{sp}(W, R)$ Hamiltonian 構造を不変にするベクトル場からなる CLAS。
- ④ $L_{contact}(R)$ contact 構造を不変にするベクトル場からなる CLAS。
- ⑤ 有限次元単純リー群上の右不変ベクトル場からなる CLAS。

C 上で考えると, ①~⑤ に対応して次のものが我々の仮定をみたす。

⑥ $\mathcal{L}_{gl}(W, \mathbb{C})$ ⑦ $\mathcal{L}_{sl}(W, \mathbb{C})$ ⑧ $\mathcal{L}_{sp}(W, \mathbb{C})$ ⑨ $\mathcal{L}_{contact}(\mathbb{C})$

⑩ 複素単純リー群上の右不変ベクトル場からなる CLAS.

⑥~⑩ は \mathbb{R} 上で考えても単純である。以下では、全て \mathbb{R} 上で考えることにする。

一般に、 F, N を多様体、 \mathcal{A} を F 上の推移的 CLAS とする。 X を、 $F \times N$ 上のベクトル場で、fibered manifold $F \times N \rightarrow N$ の各 fiber に接しているようなものとする。さらに、 X を各 fiber に制限したものは \mathcal{A} の断面であると仮定しよう。そのようなベクトル場 X からなる LAS を $\mathcal{A}[N]$ で表わすと、 $\mathcal{A}[N]$ は定義 1 を満し continuous である。次に、 F を複素多様体、 \mathcal{A} を F 上の推移的な複素解析的 LAS とする。 N を実解析多様体、 (D, I) を N 上の実解析的 pseudo-complex structure とする。 $(D$ は TN の subbundle、 $I \in \Gamma(D \otimes D^*)$ は D 上の複素構造である。詳しくは [5] とその文献を参照。) F を実多様体、 \mathcal{A} を \mathbb{R} 上の CLAS とみて、 $F[N]$ を考えることができる。ただし、ここでは実解析的な範囲で考える。 $F[N]$ の断面で、さらに pseudo-complex structure (D, I) に関して正則であるようなものからなる $F[N]$ の subsheaf を $F[N; D, I]$ で表わすと、これはやはり continuous である。

はじめに帰って、 \mathcal{L} を M 上の CLAS、 $o \in N$ に対し、

$A = \mathcal{L}(\mathcal{O})$ とする。 $P \subset F(M, N)$ を \mathcal{L} に付随する \mathcal{G} -structure, $f(t) = \mathcal{G}(t)|_W \subset \mathcal{G}\mathcal{L}(W)$ とおく。($\mathcal{G}(t) \subset W \otimes V^*$ に注意) 射影 $\mathcal{G}(t) \rightarrow f(t)$ の kernel を $\sigma(t)$ とする。 W の V における補空間 U をとれば, $\sigma(t)$ は $W \otimes U^*$ の部分空間である。

$$V_1 = \{v \in V \mid A(v) = 0, A \in \sigma(\mathcal{O})\}$$

とおこう。次の条件を仮定する。

$$(C.1) \quad \dim f(t) = \text{constant}$$

$$(C.2) \quad V_1 = W$$

この時、次の定理を得る。

定理3 (C.1) と (C.2) が成立つとする。 \mathcal{A} が ① ~ ⑤ のいずれかであれば、 \mathcal{A} は $\mathcal{A}[N]$ に局所同型である。

定理4 (C.1), (C.2). さらに実解析性を仮定する。その時 \mathcal{A} が ⑥ ~ ⑩ のいずれかならば、 N 上に pseudo-complex structure (D, I) が存在して、 \mathcal{A} は $\mathcal{A}[N; D, I]$ に局所同型である。

(注意) 条件 (C.1) は、今の場合自動的に満たされるかも知れない。また、(C.2) が成り立たない時は、 \mathcal{L} を reduction する必要がある。① ~ ④ 或いは ⑤ ~ ⑩ のときはそれがうまくできるので、それらに対しては本質的には (C.2) は必要ない。

以下で、 $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}\mathcal{L}}(W, R)$ である場合の証明の概略を述べる。まず、(C.1) によって、 $f(t)$ は $f = \mathcal{A}\mathcal{L}(W, R)$ の変形である

が、 \mathfrak{g} は rigid だから、適当な P の conjugate bundle をとる事によって、 $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{g}$ であると思ってよい。次に、 \mathfrak{g} は $W \otimes U^*$ に自然に作用するけれど、 $\sigma(t)$ はその作用で不変になっている。したがって、Morimoto の結果と (C.2) から $\sigma(t) = W \otimes U^*$ となる。ゆえ、 $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{g} + W \otimes U^*$ である。 $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{sl}(W, \mathbb{R})$ ということから、各 fiber $\mathfrak{g}(t)$ 上には体積要素が与えられている訳だが、 $\sigma = W \otimes U^*$ という事は、 P の定義する構造が、パラメータ N 方向に関しては何の制限もつけていないという事を意味しているから、結局 $\mathfrak{L}(P)$ は $\mathfrak{A}[N]$ と局所同型である。 $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(P)$ は、 \mathfrak{g} の prolongation に関する計算から得られる。

$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \text{ contact}(\mathbb{R})$ の時は、contact algebra が rigid でないから少し複雑になる。

次に、定理4で $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \mathfrak{sl}(W, \mathbb{C})$ の時の証明の概略を述べる。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(W, \mathbb{C})$ は rigid だから、 $\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{g}$ と思ってよい。また、 $\sigma(t)$ は、 \mathfrak{g} で不変という事から、conjugate を除いて次のようなものになる。 U の部分空間 U_1 と U_1 上の複素構造 I が存在して、

$$\sigma(t) = \{ A \in W \otimes U^* \mid J(A(u)) = A(I(u)), u \in U_1 \}$$

ここで、 J は W の複素構造である。

\mathfrak{g} と σ が与えられた時、列

$$0 \rightarrow \sigma \rightarrow \varpi \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

が exact になるような ϖ を決定する事は Lie 環の extension の問題だが、今の場合、 ϖ は $H^1(\mathfrak{g}, W \otimes U^*)$ の元と 1 対 1 に対応している。 $H^1(\mathfrak{g}, W \otimes U^*) = 0$ だから、結局 $\varpi = \mathfrak{g} + \sigma$ である。

\mathfrak{L} と $\mathfrak{A}[N; D, I]$ が局所的に同型である事を示すには、 P の structure function を決定する必要がある。まず次の分解に注意する。

$$\begin{aligned} V \otimes \wedge^2 V^* / \delta(\mathfrak{g} \otimes V^*) &= V \otimes \wedge^2 W^* / \delta(\mathfrak{g} \otimes W^*) + V \otimes W^* \otimes U^* / \delta(\mathfrak{g} \otimes U^* + \sigma \otimes W^*) \\ &\quad + W \otimes \wedge^2 U^* / \delta(\sigma \otimes U^*) + U \otimes \wedge^2 U^* \end{aligned}$$

上の分解に対応して $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ とする。 $c_1(t)$ は $\mathfrak{L}(t)$ の structure function で、 \mathfrak{g} で不変だから今の場合 0 に等しい。 c_4 については、一般に次が成り立つ: $u, u' \in U$ の時、 $\tilde{\rho}(c(u, u')) = -[\tilde{\rho}(u), \tilde{\rho}(u')]$ 。

$W^\pm = \{w \in W^{\mathbb{C}} \mid Jw = \pm \sqrt{-1} w\}$ 、同様にして $U_1^\pm \subset U_1^{\mathbb{C}}$ を定義しよう。 c が構造方程式をみたすことから、次の補題を得る。

補題 (1) $c_3 = 0$

(2) c_2 の代表 c_2 が存在して、 $w \in W^+$, $u \in U_1^+$ のとき

$$c_2(w, u) = 0, \quad c_2(w, \bar{u}) = \varphi(\bar{u})w$$

ここで、 φ は $(U_1^-)^*$ に値をもつ N 上の函数。

TN の subbundle D と $I \in \Gamma(D \otimes D^*)$ を、 $D_t = \{\tilde{\rho}_t(u) \mid u \in U_1\}$ $I(\tilde{\rho}(u)) = \tilde{\rho}(Iu)$ で定義しよう。 $S = \{X \in D^{\mathbb{C}} \mid IX = \sqrt{-1}X\}$ と

おく。(D, I) が pseudo-complex structure であることをい
うには、次を証明すればよい。

$$X, Y \in \mathcal{P}(S) \text{ ならば, } [X, Y] \in \mathcal{P}(S).$$

容易に分るように、これは次に同値である： $u, u' \in U_1^+$ ならば
 $\underline{c}(u, u')$ の U 成分は U_1^+ に含まれる。 $A \in \mathcal{A}$ 、 \underline{c} を、 $\underline{c}_3 = 0$
で \underline{c}_2 が補題を満たす様にとる。定理 2 から、 $T \in \mathcal{G} \otimes V^*$ が
存在して、 $u, u' \in U_1^+$ の時

$$(A \circ \underline{c})(u, u') = A \underline{c}(u, u') = (\delta T)(u, u').$$

右辺 $\in W^+$ だから、 $\underline{c}(u, u') \in U_1^+$ 。故、(D, I) は pseudo-
complex structure である。

φ に対して、 $\tilde{\varphi} \in \mathcal{P}(\bar{S}^*)$ を、 $\tilde{\varphi}(\tilde{p}(\bar{u})) = \varphi(\bar{u})$ ($u \in U_1^+$)
と定める。 N 上には、 $\bar{\omega}_N: \wedge^r \bar{S}^* \rightarrow \wedge^{r+1} \bar{S}^*$ が複素多様体の
場合と同様にして定義される事に注意する。勿論、 $\bar{\omega}_N \circ \bar{\omega}_N = 0$ 。
この時、構造方程式から次の補題が成り立つ。

補題 $\bar{\omega}_N \tilde{\varphi} = 0$

φ は C_2 の essential な部分と考えられるが、一般に 0 で
はない。ところで、 $\bar{\omega}$ が与えられた時、 \mathcal{G} と \mathcal{G} -structure P
は conjugate を除いてしか決まらないが、structure function
は P によって値が違ってくる。 $\mathcal{A}[N; D, I]$ の方の structure
function を調べると、bundle のとり方にはよるけれども、
その標準的な bundle P° の structure function c° は、

$c_1^c = c_2^c = c_3^c = 0$ である事が容易に分る。したがって、 \mathcal{L} と $\mathcal{A}[N; D, J]$ が同型である事をいうには、 P の conjugate bundle P' を、 $c_2^c = 0$ が成り立つ様にとれる。ことを示さなければならぬ。これは上の補題から示す事ができる。即ち、実解析性を仮定しているから、 $\exists_N f = \tilde{f}$ となるような \mathbb{C} -valued の函数 f が存在する。 $f = f_1 + \sqrt{-1} f_2$ として、 $GL(V, W)$ -valued の函数 a を、

$$a = \begin{pmatrix} e^{f_1 \text{id} + f_2 J} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$$

と定義する。すると、 $P' = R_a P$ に対しては、 $c_2^c = 0$ である。 c' の他の成分は c^c と等しいので、Tanaka によって証明された \mathcal{G} -structure の同型定理 (cf. [6]) を使うと、 P' と P^c は同型である事が結論できる。ゆえに、 $\mathcal{L}(P')$ と $\mathcal{A}[N; D, J]$ は同型である。 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P')$ は、 \mathcal{G} の prolongation に関する計算から得られる。

最後に、 \mathcal{L} の formal algebra について注意を述べる。点 $x \in M$ における \mathcal{L} の formal algebra を L としよう。適当な同一視のもとで、 L は $D(V, W) = W + W \otimes V^* + W \otimes S^2 V^* + \dots$ の subalgebra である。 $D(V) = V + V \otimes V^* + \dots$, $\mathcal{G} = L_0 / L_1$ とする。ここで、 $\{L_R\}_{R \geq 1}$ は L の自然な filtration。写像 $V \ni v \rightarrow \underline{v} \in D(V)$ を、 $w \in W$ に対しては $\underline{w} \in L$ であるように選ぶ。同様に、 $\mathcal{G} \ni A \rightarrow \underline{A} \in L$ とする。 $v \in V$ の時、

$\tau_v: \mathfrak{g} \rightarrow V \otimes V^*$ を

$$\tau_v(A) = ([\underline{v}, A] - A\underline{v}) \text{ の } V \otimes V^* \text{ の 項}$$

と定義しよう。すると、これから導かれる $\tau_v: \mathfrak{g} \rightarrow V \otimes V^*$ は cocycle であって、cohomology class $[\tau_v] \in H^1(\mathfrak{g}, V \otimes V^*)$ は、L だけから定まる事が容易に分る。また、これは §2 で定義したものと同じものである事も証明できる。同様にして、c の微分も L を使って定義できるが、省略する。

文献

- [1] E. Cartan, Les groupes de transformations continus, infinis, simple, Ann. Ec. Norm. Sup. 26 (1909), 93-161
- [2] K. Kiso, Local properties of intransitive infinite Lie algebra sheaves, (To appear)
- [3] T. Morimoto, On the intransitive Lie algebras whose transitive parts are infinite and primitive, (To appear)
- [4] I.M. Singer-S. Sternberg, On the infinite group of Lie and Cartan, J. Analyse Math. 15 (1965), 1-114
- [5] N. Tanaka, On non-degenerate real hypersurface, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan J. Math. 2 (1976), 131-190
- [6] K. Ueno, A study on the equivalence of generalized G-structures, 京大修士論文, 1968