数理解析研究所講究録
第 291 巻 1977 年 46-62

Lie の differential invariant について

京大理　　森本 徹

序．　S. Lie は，その論文 Über Differentialinvarianten (Math. Ann. Bd 24, 1884) の中で，豊富な例によって，differential invariant の重要性を説いている。まずその中からいくつかの例を拾って，Lie のいう differential invariant とはどんなものか見てみよう。

例1　2階常微分方程式：

$$y'' = \phi(x, y, y')$$

は，(x, y)－空間の一般な変換：

$$\begin{cases} y_1 = Y(x, y) \\ x_1 = X(x, y) \end{cases}$$

によって，x_1, y_1 についての常微分方程式：

$$y_1'' = \phi_1(x_1, y_1, y_1')$$

に写る。　$y', \phi, \phi_x, \cdots$ らの関数 $\Omega(y', \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_{y'}, \cdots)$ で上の形の任意の変換に対して

$$\Omega(y', \phi, \phi_x, \cdots) = \Omega(y_1', \phi_1, \phi_{1x_1}, \cdots)$$

を満すような関数 Ω を differential invariant という。

例2　n 階の斉次線形常微分方程式：

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x)\,y = 0$$

は 次の形の変換：

$n > 1$ のとき

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) \\ \bar{y} = \lambda(x)\, y \end{cases}$$

$n = 1$ のとき

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) \\ \bar{y} = g(x)\, y^{\mu} \quad (\mu : \text{任意定数}) \end{cases}$$

によって、同じ形の微分方程式：

$$\frac{d^n \bar{y}}{d\bar{x}^n} + \bar{P}_1(\bar{x})\frac{d^{n-1}\bar{y}}{d\bar{x}^{n-1}} + \cdots + \bar{P}_n(\bar{x})\,\bar{y} = 0$$

に写る。関数 $\Omega(P_1, P_2, \cdots, P_1', \cdots, P_i^{(k)} \cdots)$ で 上の形の任意の変換に対して

$$\Omega(P_1, P_2, \cdots) = \Omega(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \cdots)$$

を満すものを differential invariant という。

この differential invariant については、19世紀終り頃、Halphen, Laguerre, Forsyth, etc. らによって詳しく計算されている。詳細は Wilczynski; Projective Differential Geometry of curves and ruled surfaces, Teubner (1906) を参照いただきたい。

例3　2階偏微分方程式：

$$r = F(x, y, z, p, q, s, t)$$

(ここで $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$)

は，(x, y, z)－空間での一般な変換；

$$\begin{cases} x_1 = X(x, y, z) \\ y_1 = Y(x, y, z) \\ z_1 = Z(x, y, z) \end{cases}$$

によって，　$r_1 = F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, s_1, t_1)$　に写るとする。このとき関数 $\Omega(p, q, s, t, F, F_x, F_y, \cdots)$ で

$$\Omega(p, q, s, t, F, F_x \cdots) = \Omega(p_1, q_1, \cdots, F_{1x_1}, \cdots)$$

を満すものを differential invariant という。

Lie はこの differential invariant を求めることが，2階偏微分方程式の分類の基礎になるだろうといっている。

例を挙げるのはこれ位に留めておくが，このように，微分方程式のある族と，ある変換群（一般に無限次元）が与えられ，その族がその群に属する任意の変換によって不変となっているとき，differential invariant というものが考えられる。そしてこの differential invariant を調べることは，微分方程式の equivalence や分類の問題，さらにまた解法の問題とも密接な関係を持つ。今日，もう一度，Lie の問題としたところを考え直してみるのもおもしろいのではないかと思われる。

ここでは，まず現代的な立場から differential invariant の formulation を与えよう。そして differential invariant

に関するある種の有限性についての定理を述べる。そして最後に一つの例として、一般化された Monge-Ampère の方程式を intrinsic な形で定義し、この微分方程式の狭の接触変換群に関する differential invariant の計算が興味深い問題ではないかということを指摘したい。

§1. differential invariant

$\pi : M \to N$, を fibred manifold とする。その local cross sections 全体の集合を $\Gamma(M)$ で表わし、その k-jets 全体のなす空間を $J^k(M)$ で表わす。$\sigma \in \Gamma(M)$ に対して $j_x^k\sigma$ で、σ の x での k-jet, $j^k\sigma$ で、$x \to j_x^k\sigma$, によって決まる $J^k(M)$ の section を表わす。

a を M の local diffeo. とする。$\sigma \in \Gamma(M)$ に対して $\pi \circ a \circ \sigma$ が N の local diffeo. のとき、$a \circ \sigma \circ (\pi \circ a \circ \sigma)^{-1}$ が定義され、$\Gamma(M)$ の元となる。これを $a \cdot \sigma$ と略記しよう。また $z \in J^k(M)$ に対して、$z = j_x^k(\sigma)$ となる $\sigma \in \Gamma(M)$ をとったとき $a \cdot \sigma$ が意味を持つならば、$(p^k a)(z) = j^k_{a(x)}(a \cdot \sigma)$ によって $p^k a$ を定める。このようにして M の local diffeo. a から $J^k(M)$ の local diffeo. $p^k a$ が導かれる。

さて、$J^k(M)$ の submanif. $\mathcal{R}$ を与えることは、N を独立変数の空間、M を独立変数と従属変数をあわせた空間とする

k階の微分方程式を与えることだとみなせる。従ってこのような$\mathcal{R}$をM上のk階の微分方程式と呼ぼう。

aをMの loc. diffeo. とすると，$p^k a$はM上のk階の微分方程式$\mathcal{R}$を同じくk階の微分方程式$(p^k a)(\mathcal{R})$に写す。これをaの作用とみて$a\cdot\mathcal{R}$と略記しよう。（$a\cdot\mathcal{R}$が意味を持つためには，勿論$p^k a$の定義域が$\mathcal{R}$を含んでいなくてはならない。しかし以下，定義域云々については，いちいち断らないことにする。）

今$\mathcal{D}$をM上のk階の微分方程式達のある族とし，$\mathcal{L}$をM上の Lie algebra sheaf とする。即ち$\mathcal{L}$はM上の local vector fields の germs のある集合からなっていて，各 stalk が通常の Lie bracket に関して，Lie algebra になっているとする。そして$\mathcal{G}(\mathcal{L})$で$\mathcal{L}$から生成されるM上の pseudo-group を表わすことにする。$\mathcal{D}$が$\mathcal{L}$で不変とは，$a\in\mathcal{G}(\mathcal{L})$, $\mathcal{R}\in\mathcal{D}$に対して$a\cdot\mathcal{R}\in\mathcal{D}$が成立つことである。

$\mathcal{L}$－不変な微分方程式の族$\mathcal{D}$に対して，fibred manif. $E\xrightarrow{\pi'}F$と，E上の Lie algebra sheaf $\mathcal{L}'$があって，次の i), ii), iii)を満すとき，$(E\xrightarrow{\pi'}F, \mathcal{L}')$を$(\mathcal{D}, \mathcal{L})$の表現といおう。

i) $\exists$ map, $\mathcal{F}: \mathcal{D}\longrightarrow \Gamma(E)$.

ii) $\exists$ isomorphism, $\rho: \mathcal{G}(\mathcal{L})\longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{L}')$.

iii) $\quad \mathcal{F}(a\cdot\mathcal{R}) = \rho(a)\cdot\mathcal{F}(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R}\in\mathcal{D},\ a\in g(\mathcal{L}).$

$\mathcal{L}$-不変な$\mathcal{D}$に対して，localには，その表現がいつでも存在すると思ってよい。序で述べた例についても，その表現が容易に構成できる。例えば，例2の場合だと，$E=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$，$F=\mathbb{R}$とし，微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n(x)y = 0$$

に対して，Eのsection $(P_1(x),\cdots,P_n(x),x)$を対応させる。そしてE上のLie algebra sheaf $\mathcal{L}'$は$(P_1,\cdots,P_n,x)$から$(\bar{P}_1,\cdots\bar{P}_n,\bar{x})$への変換によって決めればよい。

今$(E\xrightarrow{\pi'}F,\mathcal{L}')$を$(\mathcal{D},\mathcal{L})$の表現とする。

$J^l(E)$上のfunction Ωで，任意の$a\in g(\mathcal{L})$，$\mathcal{R}\in\mathcal{D}$に対して

$$j^l(\mathcal{F}(\mathcal{R}))^*\Omega = \overline{\rho(a)}^*\circ j^l\mathcal{F}(a\mathcal{R})^*\Omega$$

$$\left(\text{ここで，}\ \overline{\rho(a)} = \pi'\circ\rho(a)\circ\mathcal{F}(\mathcal{R})\right)$$

を満たすものをl次のdifferential invariantという。

$$\begin{tikzcd}
J^l(E) \arrow[r, "p^l\rho(a)"] \arrow[d] & J^l(E) \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\rho(a)"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d] \\
F \arrow[u, bend right, "\mathcal{F}(\mathcal{R})"'] \arrow[r, "\overline{\rho(a)}"] \arrow[uu, bend left=60, "j^l\mathcal{F}(\mathcal{R})"] & F \arrow[u, bend right, "\mathcal{F}(a\mathcal{R})=\rho(a)\mathcal{F}(\mathcal{R})"'] \arrow[uu, bend right=60, "j^l\mathcal{F}(a\mathcal{R})"']
\end{tikzcd}$$

それでは，differential invariantをどのようにして求めるか，原理的には簡単である。次にそれを説明しよう。

まずE上のLie algebra sheafの$J^l(E)$へのprolongation

について述べておこう。E上の local vector field X に対して、それの生成する local 1-pr. group を (φ_t) とする。$(p^l\varphi_t)$ は $J^l(E)$ 上の local 1-pr. group をなし、それから決まる $J^l(E)$ 上の local vector field を p^lX とする。このとき、E上の local vector field X, Y に対して

$$p^l[X, Y] = [p^lX, p^lY]$$

が成立つ。$\mathcal{L}'$ を E上の Lie algebra sheaf とすると、$\mathcal{L}'$ の section X に対して $J^l(E)$ 上の vector field p^lX が決まり、これから $J^l(E)$ 上の Lie algebra sheaf $\mathcal{L}'^{(l)}$ が定まる。これを $\mathcal{L}'$ の $J^l(E)$ への prolongation という。

$\mathcal{L}'^{(l)}$ から $J^l(E)$ の tangent bundle への evaluation map によって $J^l(E)$ 上の differential system $D(\mathcal{L}'^{(l)})$ が定まる。最初に紹介した Lie の論文の、主定理は、我々の表現に従えば、次のようになる。

<u>Theorem</u> (Lie). $\mathcal{D}$ は $\mathcal{L}$-invariant な微分方程式の族とし、$(E \overset{\pi}{\to} F, \mathcal{L}')$ はその表現とする。$\mathcal{R}_0 \in \mathcal{D}$ とし、Ω は $j^l_{x_0}(\mathcal{F}(\mathcal{R}_0))$ の近傍で定義された $J^l(E)$ 上の関数とする。このとき Ω が differential invariant であるための必要十分条件は、Ω が $D(\mathcal{L}'^{(l)})$ の first integral であることである。

証明は、微分と積分の関係からほとんど明らか。

§2. differential invariant の有限性.

$\mathcal{D}$ を $\mathcal{L}$-不変な微分方程式の族, $(E \xrightarrow{\pi'} F, \mathcal{L}')$ をその表現とする。先にみたように, 各 $k \geq 0$ に対して k次の differential invariant は $J^k(E)$ 上の differential system $D(\mathcal{L}'^{(k)})$ の 1-st integral として求まる。$D(\mathcal{L}'^{(k)})$ の次元が一定ならば, それは完全積分可能だから, 常微分方程式を解くことによって求まる。このようにして次数とともに無限に増大する differential invariants の族が存在するが, これに関してある意味での有限性が成立つこと, 即ちある k_0 が存在してそれより高い次数の differential invariant はそれ以下の differential invariant を微分したものから得られることを示そう。なお, A. Kumpera も同様の問題を少し違った形で J. Diff. Geom. 10 (1975) 289–416, の中で扱っていることを注意しておく。

以下一つの表現 $(E \xrightarrow{\pi'} F, \mathcal{L}')$ を固定し考えるので, 記号の簡単のため, ダッシュをとって $(E \xrightarrow{\pi} F, \mathcal{L})$ で表わす。また様々の projection を次の様に書くことにする。

$$\begin{tikzcd} J^{k+1}(E) \arrow[r, "\pi_{k+1,k}"] & J^k(E) \arrow[r, "\pi_k"] \arrow[rr, bend right, "\varpi_k"'] & E \arrow[r, "\pi"] & F \end{tikzcd}$$

まず δ-微分を定義しよう。Ω を $J^k(E)$ 上の function, v を F 上の vector field (あるいは少し一般に $\varpi_{k+1}^{*} TF$ の

section ）とする。このとき $\delta_v \Omega$ が $J^{k+1}(E)$ 上の function として次のように定義される。

$$(\delta_v \Omega)(z^{k+1}) = v_{\varpi_{k+1}(z^{k+1})}(j^k\sigma)^*\Omega$$

ここで，σ は E の section で $j^{k+1}_{\varpi_{k+1}(z^{k+1})}(\sigma) = z^{k+1}$ を満すもの．上の定義は勿論 σ の選び方によらない。また local にも意味をもつ。次の性質は基本的である。

Proposition 1. X を E 上の，v を F 上の (local) vector field, Ω を $J^k(E)$ 上の (local) function とすると

$$\delta_v((p^kX)\Omega) = (p^{k+1}X)(\delta_v\Omega).$$

さて，$D(\mathcal{L}^{(k)})$ を D^k と略記し，D^k の 1st integrals 全体を $I(D^k)$ 又は I^k と書き，$z^k \in J^k(E)$ での I^k の germs 全体を $I^k_{z^k}$ と書くことにする。明らかに，$f_1, f_2 \cdots f_s \in I^k_{z^k}$ ならば，その関数 $F(f^1,\dots,f^s)$ も $I^k_{z^k}$ の元である。任意の $I^k_{z^k}$ の元が $f^1,\dots,f^s$ の関数として表わされるとき，$f^1,\dots,f^s$ は $I^k_{z^k}$ を生成するといい，それらが独立なとき，$f^1,\dots,f^s$ を $I^k_{z^k}$ の fundamental system といおう。

$\pi_{k+1,k}(z^{k+1}) = z^k$ とすると，$\pi_{k+1,k*}D^{k+1}_{z^{k+1}} = D^k_{z^k}$ が成立つことより，

$$\pi^*_{k+1,k} I^k_{z^k} \subset I^{k+1}_{z^{k+1}}.$$

が成立つ。また，Prop. 1. より，次が成立つ。

$$\delta_v I^k_{z^k} \subset I^{k+1}_{z^{k+1}}$$

ここで v は $\varpi_k(z^k)$ の nbd. で定義された勝手な vector field. さて我々の，有限性の定理は次のように述べられる。

<u>Theorem.</u> $(z^k)_{k\geq 0}$ を $J^\infty(E)$ の元とする。即ち $z^k \in J^k(E)$ で $\pi_{k+1}(z^{k+1}) = z^k$. そしてこの点において，任意の k に対して，z^k の nbd. で $\dim D^k$ は const. を仮定する。このとき integer k_0 が存在して，$k \geq k_0$ に対して $I^{k+1}_{z^{k+1}}$ は $\delta_v I^k_{z^k}$ 及び $\pi^*_{k+1,k} I^k_{z^k}$ から生成される。

以下その証明の概要を示す。

E の vertical vectors 全体のなす E 上の vector bundle を $V(E)$, π^*_k, $\pi^*_{k,k-1}$ 等で induced bundle を表わすと，次は exact.

$$0 \longrightarrow V(E) \longrightarrow TE \xrightarrow{\pi_*} \pi^*(TF) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varpi^*_k S^k(T^*F) \otimes \pi^*_k V(E) \longrightarrow TJ^k(E) \longrightarrow \pi^*_{k,k-1} TJ^{k-1}(E) \longrightarrow 0$$

これより次の exact seq. によって $J^k(E)$ 上の bundle $\mathcal{J}^k$ を定義する。

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^k \longrightarrow D^k \longrightarrow \pi^*_{k,k-1} D^{k-1} \longrightarrow 0$$

contraction によって二次の map λ を定義しよう.

$$\begin{array}{c} \varpi^*_{k+1} S^{k+1}(T^*F) \otimes \pi^*_{k+1} V(E) \times \varpi^*_{k+1} TF \\ \downarrow \lambda \\ \varpi^*_{k+1} S^k(T^*F) \otimes \pi^*_{k+1} V(E) \end{array}$$

<u>Proposition 2.</u> z^k, z^{k+1} の nbd. で $\dim \mathcal{J}^k$, $\dim \mathcal{J}^{k+1}$, $\dim D^k$ は const. とし $\pi_{k+1}(z^{k+1}) = z^k$, $\varpi_{k+1}(z^{k+1}) = x$ とすると,

$$\lambda(\mathcal{J}^{k+1}_{z^{k+1}} \times T_x F) \subset \mathcal{J}^k_{z^k}.$$

これらを dual にして考えよう。次は exact.

$$0 \longrightarrow \pi^*_{k,k-1} T^* J^{k-1}(E) \longrightarrow T^* J^k(E) \longrightarrow \varpi^*_k S^k(TF) \otimes \pi^*_k V(E)^* \longrightarrow 0$$

そこで, D^k の annihilators からなる space を Φ^k, $\mathcal{J}^k$ のそれを η^k とすると, 次は exact.

$$0 \longrightarrow \pi^*_{k,k-1} \Phi^{k-1} \longrightarrow \Phi^k \longrightarrow \eta^k \longrightarrow 0$$

また次の map μ が λ と dual に定義される.

$$\varpi^*_{k+1} S^k(TF) \otimes \pi^*_{k+1} V(E)^* \times \varpi^*_{k+1}(TF)$$
$$\downarrow \mu$$
$$\varpi^*_{k+1} S^{k+1}(TF) \otimes \pi^*_{k+1} V(E)^*$$

このとき, Prop. 2 は次と同値.

<u>Proposition 2'.</u> z^k, z^{k+1} の nbd. で $\dim \eta^k$, $\dim \eta^{k+1}$, $\dim \Phi^k$ は const. とすると,

$$\mu(\eta^k_{z^k} \times T_x F) \subset \eta^{k+1}_{z^{k+1}}.$$

さらに次の Prop が成立つ.

<u>Proposition 3.</u> z^k, z^{k+1} の nbd. で $\dim \eta^k$, $\dim \eta^{k+1}$, $\dim \Phi^k$ が const. とする. さらに,

$$\mu : \eta^k_{z^k} \times T_x F \longrightarrow \eta^{k+1}_{z^{k+1}}$$

は surjective とする。このとき次が成立つ。$f_1, \cdots f_s$ を $I^k_{z^k}$ の fundamental system とし $v_1, \cdots, v_n$ を x の nbd. での frame とすると

$$\{ \pi^*_{k+1,k} f_\alpha, \quad \delta_{v_i} f_\alpha \quad ; \alpha = 1, \cdots, s, \ i = 1, \cdots, n \}$$

から $I^{k+1}_{z^{k+1}}$ の fundamental system が選べる。

上の propositions の証明は略するが、それらを認めると、定理は次のように直ちに分る。定理での仮定のもとに、

$$\eta^0_{z^0} + \eta^1_{z^1} + \cdots + \eta^k_{z^k} + \cdots$$

は $\sum_{k=0}^{\infty} S^k T_x F \otimes V(E)^*_{z^0}$ の $\sum S^k T_x F$ -sub module となる。従って有限生成，このことよりある k_0 が存在して $\mu : \eta^k_{z^k} \times T_x F \longrightarrow \eta^{k+1}_{z^{k+1}}$ は surjective となり Prop. 3 より定理が成立つ。

§3. generalized Monge-Ampère equation

x, y を独立変数，z を未知関数とし，その2階までの偏微分を p, q, r, s, t で表わす。

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

（ここで $H, K, \cdots N$ は x, y, z, p, q だけの関数）

の形の方程式は Monge-Ampère の方程式として古くから知られている。

ここでは，これを少し拡張して考え座標によらない intrinsic

方法で n 変数の一般化された Monge-Ampère の方程式を定義する。

N を $(r+s)$-dim diff manif. とし TN の r-dim subspaces 全体からなる N 上の Grassmann bundle を $C_{r,s}(N)$ 又は単に $C_r(N)$ と書き、N への projection を π で表わす。$C_{r,s}(N)$ 上の differential system D が

$$D_z = \{ \xi \in T_z C_{r,s}(N) \mid \pi_* \xi \in z \}$$

によって自然に定義される。

$(x^1, \cdots x^r, y^1, \cdots y^s)$ を N の loc. coord. system, U をその coord. nbd. とする。

$$\mathcal{U} = \{ z \in \pi^{-1}(U) \mid dx^1|_z, \cdots dx^r|_z ; \text{lin. indep.} \}$$

とおくと、$\mathcal{U}$ は $C_{r,s}(N)$ の open set で $z \in \mathcal{U}$ に対して

$$dy^\alpha|_z = \sum_{i=1}^{r} p_i^\alpha(z)\, dx^i|_z \qquad \alpha = 1, \cdots s.$$

を満足する $p_i^\alpha(z)$ が unique に定まり、$(x^i, y^\alpha, p_i^\alpha)$ は $\mathcal{U}$ 上の coord. system を与える。このとき D は $\mathcal{U}$ 上、

$$dy^\alpha - \sum_i p_i^\alpha dx^i = 0 \qquad \alpha = 1, \cdots, s$$

で定義される。従って、例えば $s = 1$ のとき D は $C_{r,1}(N)$ 上の contact structure を定めることが分る。

<u>Proposition 1.</u> X を r-dim manif., $f : X \to N$ を immersion とすると、f の微分によって

$$cf : X \longrightarrow C_r(N)$$

が導かれ，cf は D の integral manif. となる。逆に，
$F : X^r \longrightarrow C_r(N)$ が D の integral manif. でかつ
$\pi \circ F$ が immersion ならば，$c(\pi \circ F) = F$ となる。

$C_r(N)$ 上の diff. system D の r-dim. integral elements 全体は $C_r(C_r(N))$ の submanifold となる。それを $\underbrace{C_r^2(N) \text{ と書く。}}_{\text{又は } C_{r,s}^2(N)}$ いいかえれば，$C_r(N)$ の open set $\mathcal{U}$ 上で D は $\omega^1 = \cdots = \omega^s = 0$ で定義されているとすると

$$C_r^2(N) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{ Z \in C_r(C_r(N)) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}) \mid \underset{\alpha = 1, \cdots, s}{\omega^\alpha/_Z = d\omega^\alpha/_Z = 0} \}$$

次は定義と Prop. 1 より直ちに分る。

<u>Proposition 2.</u> $f : X^r \longrightarrow N$, は immersion とする。このとき，$c(c(f)) : X \longrightarrow C_r(C_r(N))$, は $C_r^2(N)$ への map となる。逆に，$F : X^r \longrightarrow C_r(N)$ が $(cF)(X) \subset C_r^2(N)$, かつ $\pi \circ F$ が immersion ならば $F = c(\pi \circ F)$.

以下 $c(c(f))$ を $c^2 f$ とかく。以上のことから次の定義は妥当であろう。

<u>Def.</u> $C_{r,s}^2(N)$ の submanifold $\mathcal{R}$ を独立変数 r, 未知変数 s の 2階の微分方程式という。

<u>Def.</u> $\mathcal{R}$ を $C_r^2(N)$ の submanif, $f : X^r \to N$, を immersion とする。 f が $\mathcal{R}$ の solution $\iff c^2(f)X \subset \mathcal{R}$

<u>Def.</u> $\mathcal{R}$ を $C_r^2(N)$ の submanif. $F : X^r \to C_r(N)$ を immersion とする。F が $\mathcal{R}$ の generalized solution $\iff c(F)X \subset \mathcal{R}$.

以上のことを念頭において generalized Monge-Ampère eq. を定義しよう。 $s=1$ とし N は $r+1$ 次元の diff manif. とする。先に注意したように、$C_{r,1}(N)$ 上の diff system D は contact structure を与えている。まず D から $C_{r,1}(N)$ 上の vector bundle E を次のように決める。今 D は $\omega=0$ で定義されているとする。$\Omega = d\omega|_D$ とおき、$z\in C_r(N)$ に対して、Ω_z から生成される $\wedge D_z^*$ の ideal を $(\Omega)_z$ として $(\Omega)_z^{(r)} = (\Omega)_z \wedge \wedge^r D_z^*$, $(\Omega)^{(r)} = \bigcup_{z\in C_r(N)} (\Omega)_z^{(r)}$ とする。$\wedge^r D^*/(\Omega)^{(r)}$ は $C_r(N)$ 上の vector bundle となる。それを E とおく。そして E からできる projective bundle を $\mathbb{P}(E)$ とする。

さて $\alpha\in\Gamma(\mathbb{P}(E))$ に対して、r 変数, 1 未知関数の 2 階の微分方程式 $\mathcal{R}_\alpha$ が

$$\mathcal{R}_\alpha = \{ Z \in C^2_{r,1}(N) \mid \alpha|Z = 0 \}$$

によって定まる。この方程式を generalized Monge-Ampère equation と呼ぼう。

これを座標で表わしてみると、$\pi : C_r(N) \to N$ の微分に関して好ましい所では、$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ の小行列式達の一次結合（係数は z についての 1 階までの微分しか含まない）を 0 とする方程式になっている。特に $r=2$ のときは、好ましい所で、従来の Monge-Ampère 方程式の形に表わされる。

R_α の generalized solution を問題にする限り、$Cr(N)$ とその上の contact str. のみが関係し、もはや N を忘れてもよい。また $\alpha \longrightarrow R_\alpha$ の対応は1対1であることを注意しておく。従って、generalized Monge-Ampère eq. を改めて次のようにより簡明に定義することができる。

M を contact manif. とし D をその上の contact str. とする。このとき前述のように、D から M 上の projective bundle $\mathbb{P}(E)$ が定まる。$\Gamma(\mathbb{P}(E))$ の元、即ち $\mathbb{P}(E)$ の local section を M 上の generalized Monge-Ampère equation という。そしてこの全体を $\mathfrak{M}$ 又は $\mathfrak{M}(M, D)$ と書こう。

ところで M の local diffeo. φ で $\varphi_* D \subset D$ となるものが contact transformation と呼ばれる。$\mathbb{P}(E)$ の作り方から、M の contact transf. φ は $\mathbb{P}(E)$ の diffeo $\tilde{\varphi}$ を導くことが分る。従って contact transf. group は $\Gamma(\mathbb{P}(E))$ に作用する。そして $\mathfrak{M}$ は contact transf. group で不変となっている。

M 上の infinitesimal contact transf. からなる Lie algebra sheaf を $\mathcal{C}$ とすると、上のことより、$\mathcal{C}$ の $\mathbb{P}(E)$ への lift $\tilde{\mathcal{C}}$ が存在する。そして $\mathfrak{M}(M, D)$ は $\mathcal{C}$ - 不変であり $(\mathbb{P}(E) \longrightarrow M, \tilde{\mathcal{C}})$ がその表現になっている。

このようにして $(P(E) \to M, \tilde{E})$ の differential invariant を計算することは、generalized Monge-Ampère eq. の contact transf. group を法としての equivalence や分類の問題と関係し、非常に興味ある問題であると思われる。