数理解析研究所講究録
第291巻 1977年 73-77

Bifurcation について

広大 理　井上 淳

最近 Bifurcation 関係の出版物が急激に増加しているのですが，必ずしも当地では その理論の raison d'être が知られているとは言い難いようなので，その解説を試みるものです．

さて，我々の出会う多くの非線型の方程式は，多くの場合，いくつかの parameter を含んでいます．一般的に

$$u_t = F(\nu; t, u) \tag{1}$$

の形をしているものと考えられます．例えば，

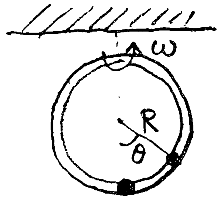
<u>Ex 1</u> (Navier-Stokes equation)

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \\ \nabla\cdot u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = b \\ u(0) = u_0 \end{array}\right. \tag{2}$$

この式の物理的意味は，適当な教科書にゆずることにして，

$R = \frac{1}{\nu}$ は Reynolds 数と呼ばれる parameter.

Ex.2 (Calabiの例)



左図のように天井からフラフープをつるし，中にパチンコ玉を入れ角速度ωで回わします．gを重力として，Newtonの法則に従ってパチンコ玉の動きを表わすと

(3) $\ddot{\theta} = \sin\theta \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R} \right)$ $\qquad \theta = \theta(t)$, $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$.

ここではωを parameter とみます．

他にいくらでも例はありますが，差し当りこれだけにしましょう．尚，parameter がいくつか入っている場合もあり，それも又面白い問題を提供してくれます．([2])

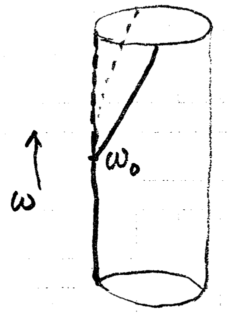
以後簡単の為，$F(\nu; t, u) = F(\nu; u)$ となっているとしましょう．

今，(ν_0, u_0) が $F(\nu_0, u_0) = 0$ をみたしているとき，u_0 を (1) の平衡解 (stationary solution) といいます．さて，この平衡解 u_0 を少しゆすってみましょう．すなわち，$u(t) = u_0 + v(t)$，として (1) 式に代入します．

(4) $v_t = F(\nu_0; u_0 + v(t))$, $v(0) = \text{given}$

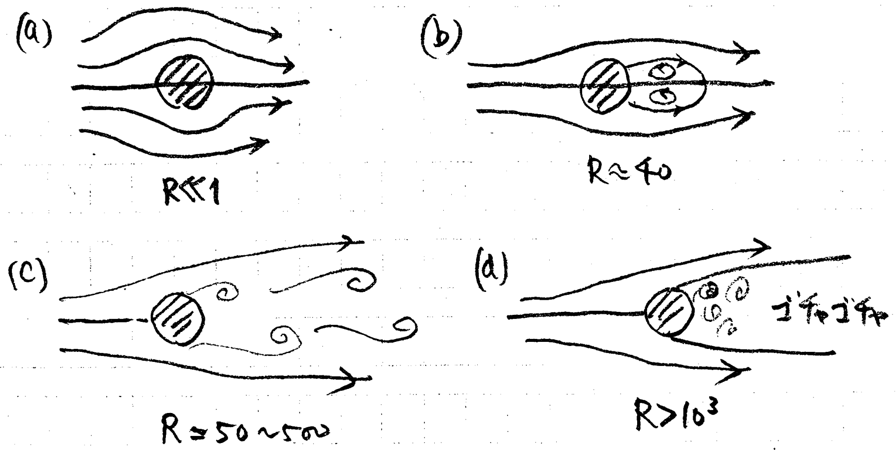
このとき，$v(0)$ が小さければ，$v(t)$ も小さく，かつその影響が時間と共に小さくなることが望ましいわけです．これを安定 (stable) ということにします．

例2の場合でωを大きくしていくと下図のようになります。



$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$. (2)のstationary sol.は $\theta=0$ と $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ です。$\omega<\omega_0$ のときはパチンコ玉はフラフープの下端にして $\omega\geq\omega_0$ となると、一般に段々上にあがってきます。すなわち、$\omega=\omega_0$ ではstationary sol.は2つあって、一つは安定、もう片方は不安定になります。このようにparameterがある点(臨界点)を越えると解のあり方が変わるとき、Bifurcationがおこるといいます。

<u>Ex 3</u> (円柱のまわりの一様流) 一様な水の流れの中に円柱を固定してRを変化させるとしましょう。(実際には、流れを速くする)。今井[7]によれば、大体以下のようになります。



上のようにして乱流が現われるのですが、これに対し、Hopf と Landau は、「乱流は安定性と技合れがくり返して生ずる」と予想しました。すなわち (a)では一様流は安定な平衡解、それが R が大きくなると (b) となって違う安定な平衡解、又 R が大きくなると (c) となって、今度は時間的に周期的な安定な解ができ、それをくり返し、今度は周期が二つのもの、3つのものとなって (d) に到る。

最近、ある stationary sol. が bifurcation point をすぎると periodic sol. となるという現象、(Hopf Bifurcation) が説明され (Ruelle-Takens [5], Marsden-McCraken [4])、又 periodic sol. から quasi-periodic sol がでてくる様子が少しずつ分かってきたようです。筆者は不勉強にして'具体的'問題についてどこ迄わかっているのか定かではありませんが、極く最近でた Joseph [3] の力作には色々と説明してあるようです。

Ex. 4. (Yamabe の問題) 有名な山辺の問題とは、M を n 次元 Riemann manifold として、(η, φ) $\eta \in \mathbb{R}$ $\varphi > 0$ on M で

(5) $$4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = \eta\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{on } M$$

なるものをみつけることにあります。R は given. 上のいみで、$\varphi = 0$ がいつ bifurcate するかと考えることができます。これが、この Bifurcation theory をこの symposium で紹介して

みたかった一つの動機です.

まだいくらでも考えることはあるようですが，今回はこれで終わらせていただきます.

文献

[1] T. Aubin : Equations différentielles non linéaires et Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire

[2] C.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret : Applications of Generic Bifurcation I. II. Arch Rat. Mech Anal 59 ('75) 159-188.

[3] D.D. Joseph : Stability of fluid motions I. Springer ('76)

[4] J.E. Marsden & M. McCraken : The Hopf Bifurcation and its applications. Springer, Appl. Math Sci #19 ('76)

[5] D. Ruelle & F. Takens : On the nature of turbulence Comm. Math Phy. 20 ('71) 167-192

[6] D.H. Sattinger : Topics in stability and bifurcation theory Springer Lec. notes 309 ('73)

[7] 今井功 : 流体力学 (前編) 裳華房.