数理解析研究所講究録
第 293 巻 1977 年 28-42

コーナーを過ぎる三次元粘性流

宇都宮大教養　　徳田 尚之

§1. いとぐち.

流体力学の分野で，いろいろ重要な応用例がありしかもこれまで相当多くの人が研究しているにも拘わらずまだよく理解されていないクラスの流れの一つに，幾何学的には不連続な形状をしているコーナーに沿う流れがある．例えば，航空機の翼と胴体部，尾翼と胴体部，又はタービン翼の根本部(及び先端部)を沿う流れとか，ディフューザー更には風洞の壁面コーナーに沿う流れ等はその代表的なものである。これらのコーナー・フローの大きな特徴の一つは，コーナーを形成する２つの平面上で成長した境界層が直接干渉し合って出来る流れの三次元性にあるといえよう。今迄広く研究されて来た三次元流の中の軸対称流とか無限長後退翼上を過ぎる流れの様な，Stokesの流れ関数の適用出来る準二次元的流れとはこの点ではっきり区別されるべきである。実は，この三次元

性の他に，形状自体のもつ不連続性のために流れの中にどの様な特異性が現われるかを知ることも大変重要な課題といってよいだろう。そこで，本論文では，コーナー・フローの特異性の最も強いと考えられるコーナー近傍で成り立つStokes解を求める事により流れの特異性を明確にし，更にこれ迄に求まっている実験結果，数値解等も紹介しながらコーナー・フロー全体の流れの特徴を解明して行くことにしよう。なお，この種のコーナー・フローの大きな特徴である流れの三次元性は，主流方向に伸びる渦糸群により最も容易に理解出来るが，これらの物理的な解釈は文献(1)に述べたのでそちらを参照されたい。

§2. コーナー・フローの構造と方程式

コーナー・フローのモデルとしては，二枚の四半無限平板が夾角2αで交わって形成されるコーナーを過ぎる流れを考えることにしよう。一様流Uはこのコーナーの交線に沿っている場合，即ち，迎え角のない場合を考えよう。このコーナー形状の前縁部のコーナー交点に原点をもつ円筒座標(r, θ, x)を座標系として考えてみよう。(詳細は図1をみよ)。考える流れの領域としては前縁部からは充分に遠

めた下流部で $Ux/\nu \gg 1$ の領域とする。これは $Ux/\nu \gg 1$ のある特性曲面上の流れを考えることに相当する。こゝに x は前縁部からの距離であり，ν は流体の運動粘性係数である。この下流部での流れを考察するにあたっては，流れを次の四つの各々異った特徴をもつ領域に分割して考えると最も便利である。

① θを止めて $(-\alpha<\theta<\alpha)$ $r\to\infty$ にして得られる核から充分離れているポテンシャル流流域.

② $\theta\to\pm\alpha$ で $r\to\infty$ にして得られる Blasius 流領域

③ θを止めて，$r\to O(1)$ の三次元性の強いコーナー領域

④ θを止めて，$r\to 0$ にして得られる Stokes 領域.

本論文の我々の興味の対象は，流れの三次元性が強く，しかもコーナー形状の特異性の強く現われる③と④の領域である。

それでは領域③と④での流れが支配される方程式を導いてみよう。$Ux/\nu \gg 1$ という条件から主流方向（x軸）については境界層近似が使え，$\frac{Ux}{\nu}\to\infty$ という極限をとりその第一近似をとると，連続及び運動方程式は次の如く表わすことが出来る（詳細は文献(2),(3)を参照せよ）。

$$\nabla^2 u = N_1(u, v, w) \qquad (2.1)$$

$$\nabla^4 \phi = H(\psi) + N_2(u, v, w) \qquad (2.2)$$

$$r u = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad r v = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad w = \frac{r}{2}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{2} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (2\cdot 3)$$

境界条件は；

$$u = v = w = 0 \qquad \theta = \pm\alpha \qquad (2\cdot 4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi, \psi \to (\varphi, \psi)_P & r \to \infty,\ \theta \text{ fixed} \\ \varphi, \psi \to (\varphi, \psi)_B & r \to \infty,\ \theta \to \pm\alpha \end{array}\right\} \qquad (2\cdot 5)$$

但し，こゝで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$H(\psi) = \frac{r}{2}\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + 2\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{2r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{2r^3} + \frac{1}{2r^2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{2r^3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2r}\frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial \theta^2},$$

$$N_1(u, v, w) = -\frac{r}{2} u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

N_2もN_1と同様な非線形対流項を表わす。又(2・5)のP，Bはポテンシャル流領域及びBlasius流領域を示す。$(\phi, \psi)_P$は勿論$r \to \infty$では一様流を表わす。

(2.1)式は主流成分uを支配する方程式であり，(2・2)は主流方向の渦度を支配する方程式で，このコーナー・フローの三次元性を特徴づける。(2.3)式は三次元速度成分をきめるベクトル・ポテンシャル関数ϕ, ψの定義式である。方程式(2・1～2・3)から明らかな様に，(2.1,2.2)はϕ, ψのみで表わす事が出来るので，(2.1),(2.2)を境界条件(2.4),(2.5)を満足する様に解けばよい。方程式(2.1),(2.2)は座標r, θについて楕円形の共に非線形方程式で，連立して解かねばならない。こゝでは，コーナー形状による流れの特異性を最も強く及

映すると考えてよいStokes近似を押し進めてみよう。実際に，物理的には流れの三次元性に重要な影響をもつ主流方向渦度方程式(2.2)を全く無視してしまうRayleigh の方法を除けば[1]，非線形方程式(2.1,2.2)を合理的に線形化出来る唯一の方法と考えられる。慣性項の影響の強いコーナー領域③附近の流れは現状では数値解に頼らねばならないが，勿論このStokes領域④の解に接続せねばならない訳であり，その意味でもStokes解は重要な意義をもってよう。数値解，実験結果については§4で述べる。

§3. Stokes解

境界条件(2.4)を満しながら方程式(2.1),(2.2)の解を変数θを固定($-\alpha \leqq \theta \leqq \alpha$)して，$r \to 0$の極限で求めることが可能である。このコーナー交点に極く近い領域では渦度の勾配が非常に大きく，慣性項の影響の小さい拡散項に支配されるいわゆる線形のStokes近似が成り立つ。今迄に求まっている特徴的長さのない問題でのStokes解 —— 例えば，Carrier & Lin[4]による半無限平板の前縁部の解 —— では，それらのStokes解が$r \to 0$であれば成り立つ事のみが判っているだけで，慣性項の効いてくる領域とどの様に接続して

ゆくのか全く不明であったが，著者は[2],[3]，この半無限物体でのStokes 解が慣性項の効く領域と解が一致するマッチング領域のあることを証明した。このためこれまで非常に限定した意義しか持つことの許されなかったStokes 解が全体の流域の中では，きりした位置づけを与えられたといってよいであろう。実際，マッチングのため，③の領域での解の形が決まってくる。さて，(2.1),(2.2) 式のStokes 解は u と ϕ について次の如く求めると便利である。[2],[3]

$$u(r,\theta) = u_0(r,\theta) + u_1(r,\theta) + \cdots \tag{3.1}$$

$$\phi(r,\theta) = \phi_0(r,\theta) + \phi_1(r,\theta) + \cdots \tag{3.2}$$

但し，$u_0 \gg u_1 \gg u_2, \cdots$　for θ fixed as $r \to \infty$.

$\phi_0 \gg \phi_1 \gg \phi_2, \cdots$

ここではコーナー・フローの代表的な直角コーナー $2\alpha = \pi/2$ の場合を考えてみよう。$2\alpha = \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ の場合のStokes 解を求める手順等は文献(3)に詳しい。

$$u = A_1 r^2 \sin 2\theta + A_2 r^6 \ln r \sin 6\theta + r^6 \left\{ A_3 \sin 6\theta + \frac{A_1^2}{36\pi} f_3(\theta) \right\} + \cdots \tag{3.3}$$

$$\phi = \frac{A_1}{4} r^4 \sin 2\theta + B_1 r^{2\lambda_1} (\sin \lambda_1 \theta + C_1 \sin(\lambda_1 - 2)\theta) + O(r^6 \ln r) + \cdots \tag{3.4}$$

ここで $A_1, A_2, A_3, \cdots B_1, C_1, \cdots$ はStokes 近似ではきまらない未定係数であり，$2\lambda_1 = k_1 + i k_2$，$k_1 = 5.808$，$k_2 = 1.464$ なる定数であ[2]

る。この直角コーナーのStokes解(3.3), (3.4)を吟味するとコーナー近傍の非常に面白い流れの特徴が判る。

(1). (3.3)から解る様にもし(y, z)を平板に沿う直角座標とすれば, $u \propto zy$となり主流速度成分uは剥離型である(例えば, $z=0$で$\frac{\partial u}{\partial y}=0$になることから明らかであろう)。

(2) $r=0$の点が表面流線群と表面摩擦応力線群の唯一の特異点(サドル点)になることからLighthill-Maskellの分類[5]から, 若し剥離が起るとすれば, 剥れた流れが再粘着する剥離気泡型の流れのパターンを示す。

(3). 流れの三次元成分であるクロス・フロー成分には, Moffatt[2]が二次元楔領域の解として求めた一連の粘性渦の解が現われる。

上の(1), (2)で特徴づけられる三次元流は, 二次元剥離流と似た主流方向の座標xについて$x^{1/2}$の如き代数的特異点が現われる(Brown & Stewartson[6])。一方(3)の粘性渦の解は指数部に複素数を伴う流れとしては大変に複雑な特異性を伴う流れである。

この直角コーナーのStokes解が示唆する様にコーナー流は大変複雑な流れのパターンが絡み合った流れといってよいであろう。勿論, このコーナー夾角2αが2πまで拡がると流れの

特異性もその角度により変ってくる事は予想されるが，その主要な特性は直角コーナーの場合に集約されているといってよいだろう。詳細は文献(3)を参照して頂くとして，コーナー流には夾角2αにより，次の三つの形の特異性が現われることを注意しておこう。

(1). 剥離型速度分布のためにコーナー交点に生じるサドル点での $x^{-1/2}$ の如き代数特異点 ($0<2\alpha<\pi$).

(2). 夾角 0〜156°内で起るMoffatt渦に代表される複素数的特異性.

(3). 表面摩擦力が交点近傍でもつ $r^{-\alpha}$ ($\alpha>0$) の如き代数特異性（主流速度については $\pi<2\alpha\leq 2\pi$，クロス・フローについては $1.43\pi<2\alpha\leq 2\pi$）.

(1)，と(3)はともに代数特異点であるが，(1)は主流方向の座標xについてであるのに対し，(3)はそれに垂直なクロス・フロー面の極座標rについてであることに注意されたい。$2\alpha=\pi$の半無限平板の場合を除くと，総ての角度のコーナー流に上の3つの特異性のうち少くともどれか一つは必ず存在していることが判っている．これらのStokes解はあくまでコーナー近傍の流れにしか適用出来ない訳であるが，コーナー領域全体の流れをみるのに今迄に発表されている数値解及び実験結果を紹介してみよう。

§.4. 数値解と実験結果.

このコーナー流の理論は $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ の場合が最も古くから研究されており，緩和法による Carrier[7], Pearson[8] の数値解，最近では大型高速計算機による Rubin & Grossman[9], Desai & Mangler[10], Ghia[11] の数値解が発表されている。Carrier[7] の解は三次元のベクトル・ポテンシャル関数を一個のスカラー関数で表わそうとしたため主流方向の渦度方程式 (2.2) が完全には満足されていなかったが，これは後に Pearson[8] により修正されている。一方，Rubin & Grossman[9], Desai & Mangler[10], Ghia[11] の解は，前二者が Gaus-Seidel法，Ghia が ADI法による大型計算機による数値解である。Rubin & Grossman の解は，座標系としては最も簡単な直角座標を用い，代数的にしか漸近しない準二次元の Blasius 流への接続は，Rubin & Pal[12] による漸近解を用いている。これに対して Desai & Mangler[10] は，どうしても誤差の大きいと考えられる未定係数を含む漸近解への接続という方法はとらずに簡単な一次変換を導入して無限遠領域まで直接数値積分するという方法を取っているが，座標系として直交しないテンソル表示を用いているため差分方程式が余りに複雑になりすぎている。Ghia の数値解は，きわめて安定な ADI 法を使っているということの他に，座標系としては直角座標，積分範囲も一次変換による無限遠までと，上の Rubin & Grossman[9], Desai

& Mangler[10]の数値スキームの長所のみを採用している。図9に示す様に，Desai & Manglerの解は，Rubin & Grossman，更にはGhiaの解と殊にクロス・フロー成分で顕著に異っているのが目をひく。数値解で用いたステップ数，差分方程式の簡潔さと，安定性等を考えるとGhiaの解が最も信頼性がある様に著者には思える。事実，Desai & Manglerの解は，Pearson, Rubin & Grossman，Ghia等の解とは余りに違いすぎるし，主流速度の等速度線を比較するとはっきりと誤りの指摘されているCarrierの解に近いというのも不思議である。

この問題の実験結果はZamir & Young[13]により示されている。上の数値解と顕著に違うのは，主流速度の等速度線が流れの対称線上で膨らみを持つことである。実際この膨らみは，藤本[14]，Barclay[15]等の実験にも再現されている様であるが，数値解では未だ見付かっていない性格のものである。この等速度線群の膨らみは物理的にはその膨らみ部分で摩擦応力が小さい領域の存在することを意味する。流れの対称線上では渦度が消えるのでその近傍に摩擦応力の小さな領域が出来る事は想像し得ることであるし何ら不思議はないが，ただ，等速度線に膨らみが出来る位極端に局所化した低摩擦力領域である必要であるかどうかは又別の問題であろう。上の数値解を比較してみると，Carrier[7]とDesai & Mangler[10]のもの等較べる

Rubin & Grossman[9] と Ghia[11] の解の方が等速度線の勾配がゆるやかで，明らかに実験に近い壁摩擦応力を殊に流れの対称線近傍で示している事が注目に値する。Ghiaの解がこれ迄の数値解の中で最も信頼性があると思えるのは，上で述べた数値スキーム上の要因の他にこの物理的な面が大きな要因になっていることをつけ加えておこう。

実験結果では常に観察されている対称線上での等速度線の膨らみがどうゆう要因により起きるのか，又現象的にはどんな特徴があるのか等まだはっきりしていない点が多い。Barclay[15] はこの膨らみが流れの安定性に強く関連しているのではないかと推測しているが，それは次の様な実験結果を根拠としている；コーナー夾角 $\pi/2$ の実験では下流に行く程増大した膨らみが，それよりは広い 135° のコーナーでは逆に減少していた。

数値解，実験結果とも直角コーナー（$2\alpha=\pi/2$）の場合しか調べられていない様であり，他の角度のものは上の Barclay[15] の 135° 以外発表されていない。例えば，$2\alpha=2\pi$ は四半無限平板を過ぎる流れにあたるが，コーナー部分に当る側縁部（side edge）の解析はない。Howarth，Stewartson[16] 等による研究はこの側縁部を除いた解であり，物理的にみてもStewartson[16] の解には疑問が多い。$2\alpha=\pi/2$ に較べれば，実験，数

値解とも易しい場合と考えられるので是非欲しいデータの一つである。

§5. 結論

コーナーを過ぎる粘性流は，我々流体力学を研究している者にとっては，色々な意味で興味のある問題を提供してくれている：本質的な流れの三次元性，剥離型である主流方向の速度成分，Moffattの粘性渦の存在，実験では常に観察されている等速度線の対称線近傍での膨らみ，又コーナー前縁部で巻き上ることにより生じる主流方向の渦対の存在等：どの一つを取ってみても興味深い問題である。

これらの解明を妨げている困難は，解析的な面でいえば，非線形問題であるため使える解析方法が極めて限定されていることによるし，又実験の面から云えば，流れ自体が極めて不安定であることによる。この様な事情で，コーナー・フローとしては最も広く研究されている夾角$\pi/2$の直角コーナーの場合でも，数値解と実験結果にはまだ可成りの差があるのが現状である。この直角コーナーよりはずっと容易と考えられる四半無限平板にいたっては数値解，実験結果もない状態である。今後の研究を期待したい。

References.

1. 徳田尚之：コーナーを過ぎる三次元粘性流
ながれ．研究ノート．1976年5月号．18.

2. Tokuda, N: Viscous flow near a corner in three-dimensions. J.F.M 53 (1972) 129

3 Tokuda, N: Stokes solutions for flow near corners in three-dimensions. J. Phys. Soc. Japan 38 (1975) 1183

4. Carrier, G.F & Lin, C.C: On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Q. Appl. Math, 6 (1948) 63

5. Lighthill, M.J: Chapt. II. Laminar Boundary Layers. Ed. L. Rosenhead Oxford Univ. Press 1963

6. Brown, S.N & Stewartson, K: Laminar Separation Ann. Rev. Fluid Mech. 1. (1972) 45

7. Carrier, G.F: The boundary layer in a corner Q. Appl. M. 4 (1947) 4

8 Pearson, J.R.A: Homogeneous turbulence and laminar viscous flow Ph.D Thesis Cambridge Univ, 1957

9. Rubin, S.G & Grossman, B: Viscous flow along a corner. Part II P.I.B.A.L Report No 69-33 (1965)

10 Desai, S.S & Mangler, K.W: Incompressible laminar boundary-layer flow along a corner. Roy. Air. Est. Tech. Rept 74062 (1974)

11. Ghia, K.N : Incompressible streamwise flow along a corner
AIAA J. 13 . (1975) 902.

12. Rubin, S.G & Dal, A : Viscous flow along a corner, Part I.
P.I.B.A.L. Rep't 69-18 (1969)

13. Zamir, M & Young, A.D : Experimental investigation of the boundary layer in a streamwise corner: Aero. Quart. 21 (1970) 313

14. 藤本武助 : 航空学会誌. (谷一郎教授の御退官[illegible])

15. Barclay, W.H : Experimental investigation of the laminar flow along a 135° corner. Aero. Quart. 24 (1973) 147

16. Stewartson, K : Viscous flow past a quarter-infinite plate.
J. Aero. Sci. 28 (1961) 1.

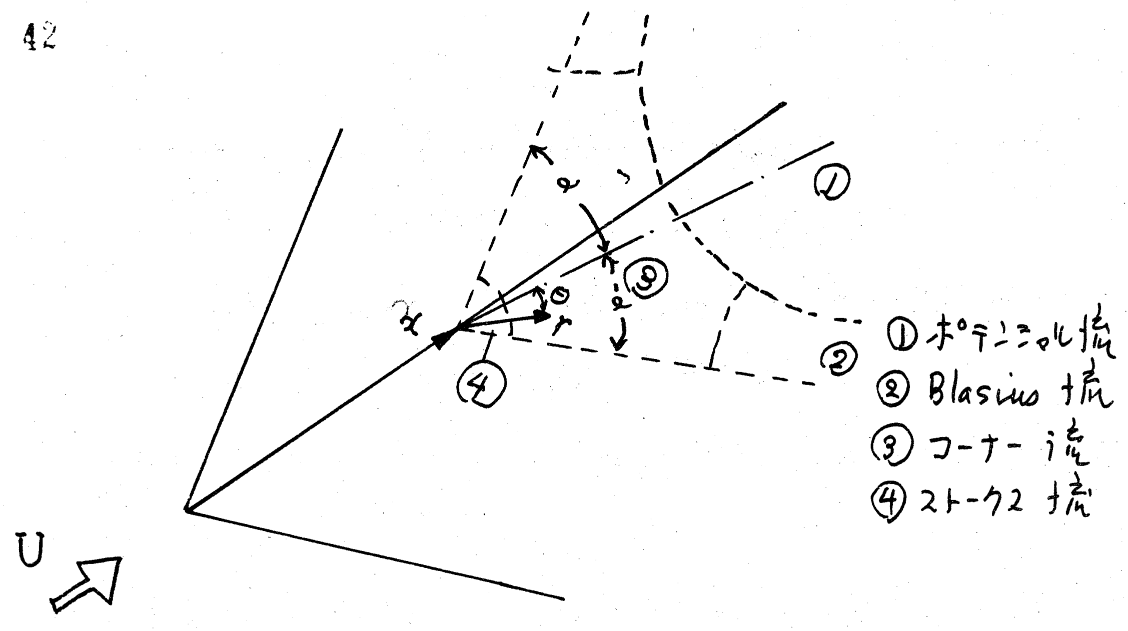

図1. 座標系と流れの領域

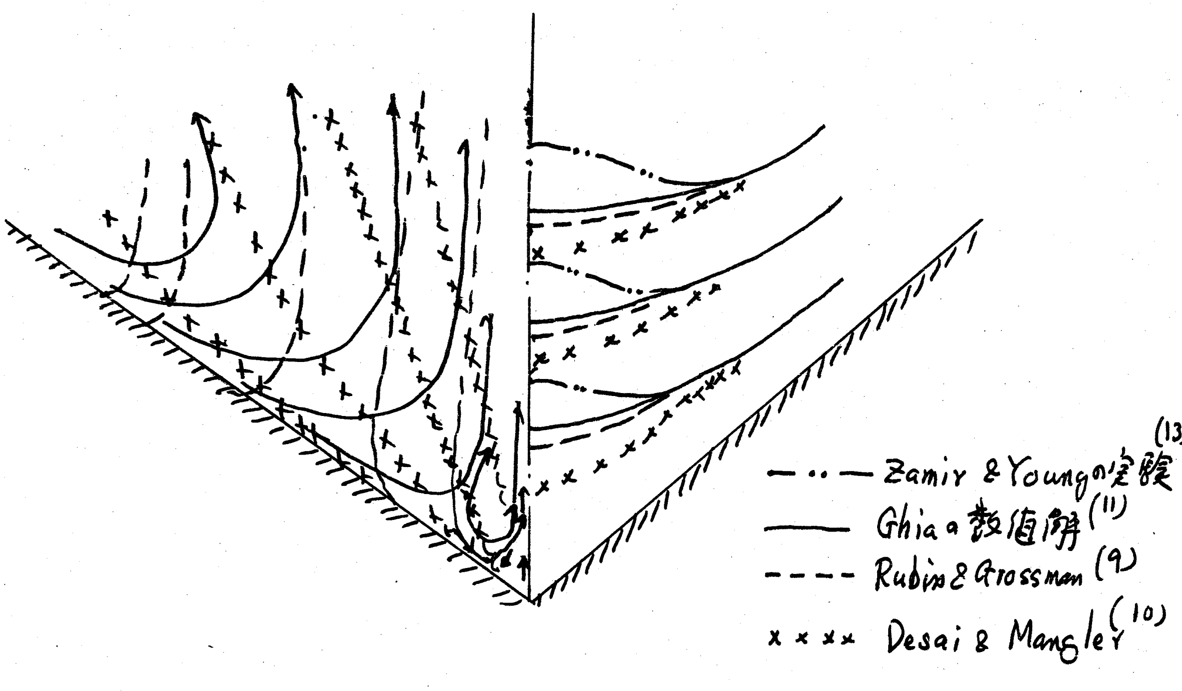

図2. 等速度線（主流速度）：右半面
とクロス・フロー面内の流線群：左半面.