数理解析研究所講究録
第294巻 1977年 1-8

The Asymptotic Sieve (*)

Enrico Bombieri

$\mathcal{N}$を自然数のある集合とする。そして $\mathcal{N}_d = \{ n \in \mathcal{N} \; ; \; n \equiv 0 \pmod d \}$ とおく。このとき，篩法の根本問題は，$\mathcal{N}_d$ の状態から，$\mathcal{N}$内にある素因子の個数が"少い"ものの分布状態を知ることである。

これをやや一般化すれば，問題は次のようになるであろう。$\{a_n\}$を $a_n \geq 0$ となる数列，P_r を $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ すなわち，ちょうど r 個の相異る素因子をもつ数の集合とする。さらに $g(n)$ をある種の"良い"函数で $\bigcup_{r=1}^{k} P_r$ 上に定義されたものとする。このとき

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \bigcup_{r=1}^{k} P_r}} a_n g(n)$$

についてどのようなことが言えるであろうか？

このような問題のとらえ方からすれば，我々が必要とする情報は，

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

$$A(x;d) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod d}} a_n$$

についてのものである。但し，それらは，$d < x^{\vartheta - \varepsilon}$ について一様に成立すべきものである。

(*) 本橋洋一 記

一般的に言って，篩法においては，

(1) $$\sum_{n\leqq x} a_n g(n)$$

に対して，漸近公式を得ることが出来る場合はあまりなく，不等式のみが得られるのが常である。そして，重み $g(n)$ を適当に（この点が困難なのであるが）とることにより，この不等式と予想される漸近公式との差をなるべく小さくすることが目的とする訳である。

この講演の目的は，このような観点に立った場合の篩法の問題に対して完全な解答を報告することにある。但し，ここでは $A(x;d)$ が $d<x^{1-\varepsilon}$ についてよい分布状態をなしている場合にかぎっている。

我々の結果を標語的に言えば次のようになるであろう。すなわち，任意の $g(n)$ に対して，(1) の上，下方からの評価を完全に定めるのである。そして，適当に $g(n)$ をとることにより，この両方の評価が一致する，すなわち，漸近公式が得られるのである。そしてこの漸近公式は，$g(n)$ より構成されるある単純な函数と

(2) $$\sum_{p\leqq x} a_p$$

とによって表現される。そして，和 (2) が知られれば問題は完全に解決されることになる訳である。しかるに，この和については篩法によっては全く何も言えぬことが Selberg の例によって示される故，結論として我々の結果は，篩法の限界を決定したことになるであろう。

明確に言えば「篩法（少くとも現今の）によるかぎり，和

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\in\bigcup_{r=1}^{k}P_r}} a_n g(n)$$

の評価には必らず和 (2) が含まれる。従って当然に (2) については何ら決定的なことが言えない」となる。

以下 我々が必要とする $\{a_n\}$ についての条件であるが、

$$A(x;d)=\frac{A(x)}{f(d)}+R(x;d)$$

と書いて $A(x)/f(d)$ を主項，$R(x;d)$ を誤差項とみる。
そこで次の仮定をする。

(A_1) $\dfrac{1}{f(d)}$ は乗法的で $\dfrac{1}{f(d)} \ll d^{-1+\varepsilon}$

及び $\dfrac{1}{f(d)}<1 \quad \forall d>1$.

(A_2) $$\sum_{d<x^{1-\varepsilon}} \max_{y\leqq x} |R(y;d)| \ll A(x)(\log x)^{-B}$$

但し $B=B(\varepsilon)$ はいくらでも大きくとれる.

(A_3) $d<x$ について一様に

$$|R(x;d)| \ll \frac{F(d)}{d}A(x)(\log x)^{c_1},$$

$$F(d)\ll d^{\varepsilon},$$

$$\sum_{d<x}\frac{F^2(d)}{d} \ll (\log x)^{c_2}$$

但し $c_1, c_2>0$ はある常数.

(A_4) $a_n \geqq 0$ であり

$$\int_1^x A(t)\,dt/t = o\bigl(A(x)\log x\bigr),\ A(x^{1/2})=o\left(\frac{A(x)}{\log x}\right)$$

$$(A_5) \qquad \sum \frac{1}{f(d)d^s} = \zeta(s+1)G(s).$$

但し $G(0)\neq 0$, $G(s)$は ある $\eta_1>0$ について $\sigma>-\eta_1$で絶対収束する Dirichlet 級数.

(A_2)をのぞいて, これらの条件は たいがいの場合にみたされている。ただ(A_2)のみが強烈な条件であり, $\{a_n\}$が素数列をshiftしたもの のときは, これは Halberstam-Richert 予想である。我々の結果は, このような強烈なことを仮定しても篩法に限界があることを示すのである。

次に T_r $(r\geq 2)$ は

$$0<u_1\leqq u_2\leqq\cdots\leqq u_r<1$$
$$u_1+u_2+\cdots+u_r=1$$

なる単体とし, $d\mu_r$ は

$$d\mu_r = \frac{du_1\cdots du_{r-1}}{u_1\cdots u_r} \qquad (r\geqq 2)$$

なる Borel-Lebesgue 測度. そして $r=1$ のときは $d\mu_r$ は点 1 における Dirac 測度とする。そして $G(u_1,\cdots,u_r)$ を T_r 上の函数とし P_r 上で

$$G^*(p_1\cdots p_r) = G\left(\frac{\log p_1}{\log n},\cdots,\frac{\log p_r}{\log n}\right)$$
$$(n=p_1\cdots p_r)$$

と新しい函数を定義する。
そして, 我々は次の様に $\{a_n\}$ の P_r 上における"分布函数"を定義する。

<u>定義</u>　$\{a_n\}$ が P_r 上で分布函数 $\gamma_x(u_1,\cdots,u_r)=\gamma_x(\underline{u})$ をもつとは次の意味にとる。
任意の T_r 上の連続函数 G に対して，$x\to\infty$ のとき，

$$\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\in P_r}} a_n G^*(n) \sim \left(\int_{T_r} G(\underline{u})\gamma_x(\underline{u})\,d\mu_r\right)\frac{HA(x)}{\log x}$$

但し

$$H=-\sum\frac{\mu(d)\log d}{f(d)}=\prod_p\frac{p}{p-1}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right).$$

一方これとは別に

$$\sum_{p\leqq x} a_p \sim \delta_x\frac{HA(x)}{\log x}$$

ときめておく。（実は $\delta_x\leqq 2$）
こうして我々の定理は次のようになる。

<u>定理</u>（Bombieri）
$\{a_n\}$ が条件 $(A_1)-(A_5)$ をみたすとき，$\{a_n\}$ は任意の r に対して分布函数 γ_x をもち

$$\gamma_x(\underline{u})=\delta_x \qquad (r:\text{奇})$$

$$\gamma_x(\underline{u})=2-\delta_x \qquad (r:\text{偶})$$

となる。

上記で標語的に言って我々の結果を説明したのであるが，この定理によって，その意味は明確になるであろう。すなわち，δ_x を知れば全てが知られるのである。

定理をやや一般化するために次の記号を導入する。

$G_1, \dots, G_r$ は $T_1, \dots, T_r$ 上で定義されているとして

$$G^+ = \sum_{h=1}^{r} \int_{T_h} G_h \, d\mu_h$$

$$G^- = \sum_{h=1}^{r} (-1)^h \int_{T_h} G_h \, d\mu_h$$

とし $G^*(n)$ は $\bigcup_{h \le r} P_h$ 上に各 G_h(*) から前のようにしてみちびかれたものとする。このとき

$$\sum_{n \le x} a_n G^*(n) \sim \left(G^+ + (1-\delta_x) G^-\right) \frac{HA(x)}{\log x}$$

となる訳であるから、定理の系として、$0 \le \delta_x \le 2$ に注意して、さらに

<u>系</u>

$$\left(G^+ - |G^-| + o(1)\right)\frac{HA(x)}{\log x} \le \sum_{n \le x} a_n G^*(n)$$

$$\le \left(G^+ + |G^-| + o(1)\right)\frac{HA(x)}{\log x}$$

あとで示すように Selberg の例によれば δ_x は $[0, 2]$ の任意の値をとるのであるから、一般的にはこの系以上には篩法ではすすめないことになる。従って、特殊な例については、篩法以外（あるいは篩法＋α）の方法で δ_x が決定できれば問題は解決する、と言ってもよい。しかし、それでもなおかつ (A_2) を仮定した上でのことである。

次に定理の応用の一つとして次のことを注意しておく。

(*) 但し G_h は $G_h(u_1, \dots, u_h)/u_1 \cdots u_h$ が T_h 上で連続という条件をみたすとする。

$G_1 = 1$, $G_2 = 2u_1u_2$ とすれば $G^+ = 2$, $G^- = 0$ であることはすぐわかる故

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \in P_2}} a_n G^*(n) \sim 2HA(x)/\log x$$

しかるに

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \in P_2}} a_n G^*(n) = \sum_{p \le x} a_p + 2 \sum_{\substack{p_1 < p_2 \\ p_1 p_2 \le x}} a_{p_1 p_2} \frac{(\log p_1)(\log p_2)}{(\log p_1 p_2)^2}$$

よって部分和をとれば次の「一般化されたSelberg公式」を得る.

$$\sum_{p \le x} a_p (\log p)^2 + \sum_{pq \le x} a_{pq} (\log p)(\log q)$$

$$\sim 2HA(x)\log x .$$

ここで $\Lambda(n+2) = a_n$ とおけば，これの第1の和は，双子素数の問題になる。そして，いままでのことをこの特別な場合について言いかえると次のようになる。

(i) $p-2 = p_1 \cdots p_r$, $r \in R$ ($p_j > p^\varepsilon$)

なる問題は R が偶，奇両方の数を含むときにのみ現在の篩法で解決される可能性がある。Chenの結果はまさにその通りである。

(ii) もしも $\underset{(p \le x)}{p-2 = p_1}$ が $o(x(\log x)^{-2})$ なる個数の解をもつならば，任意の奇数 r について $p-2 = p_1 \cdots p_r$, $p \le x$, も同様である。

最後に Selberg の例を示しておく。
$\lambda(n)$ を Liouville 函数とすると

$$a_n = 1 + (1-\delta)\lambda(n) \qquad (0 \leqq \delta \leqq 2)$$

なる数列は，容易にわかるように $(A_1)-(A_5)$ の条件をみたしている。
そしてこのとき あきらかに

$$\delta_x = \delta.$$

すなわち 定理の系の不等式は両辺ともに 'attainable' である。

付記

Bombieri氏の結果のくわしい証明は いずれ，この講演と同じ題名で ある所に発表されるとのことである。 氏の手稿によれば，それは本質的には

E. Bombieri : On twin almost primes
Acta Arith., 28, 177-193 (1975).

によって技術的には完成されている。 そしてまた (本質的には) 困難なものではない。

(1977年1月17日)