数理解析研究所講究録
第 294 巻 1977 年 124-144

ハウスドルフ次元論とその応用

統計数理研　　　長坂建二

§0. 測度の概念は数学全般にわたって重要なものだが、その果す役割は大別すると二つであろう。つまり集合の大きさを評価することと，今一つは積分を定義することである。

この小論に於いては集合の大きさの評価という面から、ハウスドルフ測度及びハウスドルフ次元論を展開しその応用についても述べることにする。ハウスドルフ測度が始めて導入されたと言ってよいのは，C. Carathéodory (1914) [ ]によってである。勿論ここではずっと一般的に，Carathéodory 外測度を導入したのだが，q次元ユークッド空間に於ける p 次元測度 ($p \leqq q$) がいかに定義され得るかについて言及しているので，最初の導入と呼んで良いだろう。このp次元測度は，全ての正数pについて Hausdorff (1919) [6]で拡張され，更にカントール集合の分数次元 (fractional dimension)，今で言うハウスドルフ次元が $\log 2/\log 3 = ,6309\cdots$

であることが示された。以来ハウスドルフ測度，ハウスドルフ次元の理論はA.S.Besicovitch等を中心に発展し，数学の広い分野と関連を持っている。まず我々は次元論の立場から，位相次元（Topological dimension）とρ次元測度との関係を見よう。

§1. 位相次元とρ次元測度.

集合の位相測度は帰納的に定義されるので，まず零次元から定義を始めることにする。

1-1. 次元零.

位相空間Xがその点$x \in X$に於いて次元零とは，xの全ての近傍Uがあるxの近傍Vを含みVの境界$\partial V = \phi$ 空集合となることである。位相空間$X \neq \phi$は，その全ての点$x \in X$に於いて次元零の時に，次元零である。

例. 区間を含まない全ての実数の集合は次元零である。

1-2. 次元n.

(i) $T\text{-}\dim(\phi) = -1$ とする。（以降位相次元を$T\text{-}\dim$と書くが混乱の恐れが無い場合には単に$\dim$と書く。）

(ii) 位相空間Xが点$x \in X$で次元n以下であるとは，xの全ての近傍Uがxの近傍Vを含みその境界∂Vの次元が，

$n-1$ 以下となることである。

(iii) 位相空間 X が、点 $x \in X$ に於いて次元 n であるとは，点 $x \in X$ で $T\text{-}\dim(X) = \dim(X) \leq n$ が成立し，$\dim(X) \leq n-1$ ではないことである。

(iv) 位相空間 X が点 $x \in X$ に於いて次元無限大とは，全ての正整数 n に対して $\dim(X) \leqq n$ が成立しないことである。

(v) 位相空間 X がその全ての点 $x \in X$ で (ii)，又は (iii)，又は (iv) を満足する時，それぞれ $\dim(X) \leq n-1$，$\dim(X) = n$，$\dim(X) = \infty$ と定義する。

例．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は，$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ であるが，証明は簡単ではない。

1-3．距離空間内の p 次元測度．

X を可分距離空間の部分集合とし，p は非負の定数としておく。集合 A の直径 (diameter) を $\delta(A)$ で表わす。($\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$，$d$ は距離) すると与えられた $\rho > 0$ に対して

$$m_p^\rho(X) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \delta(U_i)^p \qquad (1,1)$$

とする。但し $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset X$ は X の Open Covering であり，各々の直径は ρ 以下とする。(ρ-Covering と呼ぶ。) Closed Covering にしても半開区間をとっても以下の議論はそのまま成立す

る。　集合Xのp次元測度$m_p(X)$は

$$m_p(X) = \sup_{\rho>0} m_p^{\rho}(X) = \lim_{\rho\to 0} m_p(X) \qquad (1,2)$$

で定義される。

p次元測度の基本的な性質は以下の如くである。

<u>PROPOSITION 1.</u>

(i) $X \subset Y$ ならば $0 \le m_p(X) \le m_p(Y)$ 　（非負・単調性）

(ii) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ ならば　$m_p(X) \le \sum_{i=1}^{\infty} m_p(X_i)$（劣加法性）

<u>証明</u>　(i)は定義から直ぐわかる。　(ii)は各X_iと$\varepsilon>0$に対し

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta(V_j^i)^p \le m_p^{\rho}(X_i) - \varepsilon_i \le m_p(X_i) - \varepsilon_i$$

を満たすρ-Covering$\{V_j^i\}$が存在する。　但し　$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i = \varepsilon$, $\varepsilon_i > 0$.

よって

$$m_p^{\rho}(X) = \inf_{\substack{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset X \\ \rho\text{-Covering}}} \sum_{i=1}^{\infty} \delta(U_i)^p \leqq \sum_i \sum_j \delta(V_j^i)^p \le \sum_i (m_p(X_i) - \varepsilon_i) \le \sum_i m_p(X_i) - \varepsilon$$

■

<u>COROLLARY.</u>　$m_p(\cdot)$は外測度であり，特に$X \subset \mathbb{R}$, $p=1$の場合は通常のLebesgue外測度である。

<u>PROPOSITION 2</u>　$0 \le p < q$　ならば　$m_p(X) \ge m_q(X)$である。更に$m_p(X)$が有限の場合には　$m_q(X) = 0$　となる。

<u>証明</u>　任意の$\varepsilon>0$　に対して，$\sum_i \delta(U_i)^p \le m_p^{\rho}(X) - \varepsilon \le m_p(X) - \varepsilon$を満すような$\rho$-Covering $\{U_i\}$　が存在する。　そして　$p<q$より

$$m_q(X) = \lim_{\rho\to 0} \inf_{\rho\text{Cov.}} \sum_j \delta(V_j)^q \le \sum_i \delta(U_i)^q \le \rho^{q-p} \sum_i \delta(U_i)^p \le \rho^{q-p}\cdot(m_p(X) - \varepsilon)$$

■

ここで我々は位相次元と p 次元測度との関係を示そう。

THEOREM 1. X を可分距離空間の部分集合とする。

$T\text{-}dim(X) = dim(X) = n$, $0 \leq n < \infty$ ならば $m_n(X) > 0$ である。

証明. 背理法による証明をするが，その為には，$m_n(X)=0$ ならば $dim(X) \neq n$ を示せば良いが，もっと強く同じ仮定の $m_n(X)=0$ から $dim(X) \leq n-1$ を証明する。$x_0 \in X$ を中心とする半径 r の球面を $S(r) = \{x;\ x \in X,\ d(x, x_0) = r\}$ と書く。

LEMMA. $m_{p+1}(X) = 0$, $0 \leq p < \infty$ ならば $m_p(S(r)) = 0$ 但し殆んど全て (a.e.) の r に対して成立する。

LEMMA の証明. E を有界集合として，r_1, r_2 をそれぞれ

$r_1 = \inf_{x \in E} d(x_0, x)$, $r_2 = \sup_{x \in E} d(x_0, x)$ とおくと，$r_2 - r_1 \leq \delta(E)$.

次に以下の積分を考える。

$$\int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p dr = \int_{r_1}^{r_2} (\delta[S(r) \cap E])^p dr$$

$$\int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p dr \leq [\delta(E)]^p \int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$\int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap E])^p dr \leq [\delta(E)]^{p+1} \qquad (1, 3)$$

一方仮定より $m_{p+1}(X) = 0$ だから以下を満す Open Covering の列 $\{U_j^n\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する。$X \subset \bigcup_j U_j^n$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} [\delta(U_j^n)]^{p+1} = 0 . \qquad (1, 4)$$

(1, 3) と (1, 4) から

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} (\delta[S(r) \cap U_j^n])^p dr = 0$$

ここで U_j^n が Open Covering であり $\delta(\cdot)$ が半連続関数なので，積分

と Σ と交換できて

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\delta[S(r)\cap U_j^n]\right)^p dr = 0$$

を得る。よってある部分列 n_k が存在し殆んど全ての r に対し

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\delta[S(r)\cap U_j^{n_k}]\right)^p = 0$$

であり，a.e. の r に対して $m_p[S(r)] = 0$ を示している ■

定理の証明に戻ると，まず $p=0$ の場合 Lemma より

$m_1(X) = 0$ ならば $m_0[S(r)] = 0$ a.e.

よって $S(r) = \phi$ a.e.

ここから $T\text{-}\dim(X) = \dim(X) = 0$ である。証明の残された部分は，帰納法を用いれば良い。 ■

1.4. ハウスドルフ次元

X を可分距離空間の部分集合とすると，X のハウスドルフ次元（$H\text{-}\dim(X)$，又は単に $\dim(X)$ と記す。）は Proposition 2 により

$$H\text{-}\dim(X) = \dim(X) = \sup_{m_p(X)>0}\{p\} = \inf_{m_q(X)=0}\{q\}$$

と定義される。定理 1 は

$m_{T\text{-}\dim(X)}(X) > 0$ を意味するので，

<u>Corollary.</u> $H\text{-}\dim(X) \geq T\text{-}\dim(X)$.

又 Proposition 1 の Cor. から，$\mathbb{R} \supset V$ に対して

<u>Remark.</u> $H\text{-}\dim(V) < 1$ ならば $\mu_0(V) = 0$，μ_0 は Lebesgue 測度.

可算集合のハウスドルフ次元は零.

§2. ハウスドルフ次元の計算法(I)

以降H-dim(·) を単に dim(·) と書く。ハウスドルフ次元の定義は前節で与えられ，定理1から位相次元との関係もわかった。しかし実際には与えられた集合のハウスドルフ次元を計算するのは必ずしも容易ではない。この節では定義から直接計算できる例を挙げるが，後に計算法，又は次元の評価を与える諸定理を紹介し，応用例をそれぞれ示す。最後に各計算法間の関係等について言及する。

2-1. 実数の展開

最初に計算されたハウスドルフ次元はカントール集合であることは前に述べたが，実数と展開と言う観点からは，その小数部分を三進展開した際に1という項が一度も現われないような集合がカントール集合であった。ここでは我々は次の集合Xのハウスドルフ次元を計算する。

$$X = \left\{ x \in I_0 ; \ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)}{i!} \ , \ 0 \le a_i(x) \le i-2 \right\}$$
$$I_0 = [0, 1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

集合Xは $x \mapsto x+1$ という変換で不変だから I_0 に限って議論をしてかまわないし、可算集合は次元零だから展開の一意性はハウスドルフ次元の計算に際しては気にかける必要はない。集合Xは，P. Erdös [5] の中に出てくる。まず集合Sが性質 S_n を満たすとは， $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $(x_i \in \mathbb{R})$ $x_n - x_1 = \eta_n$

なる η_n があれば，S の要素 $y_1, -, y_n$ が存在して，$y_1 \equiv x_1$, $---$, $y_n \equiv x_n \pmod 1$ を満たすということで，問題は，"S_3 を満足する測度零で，完全集合は存在するか。" であり，集合 X がその解答となっている。我々はここで，$\dim(X)=1$ を示す。$X_n = \left\{x \in I_0 ;\ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x)}{i!},\ 1 \le i \le n\ \alpha \le a_i(x) \le n-2\right\}$ とすると $\mu_0(X_n) = 1/n$ である。X_n をおおう Covering を考える時に，特に巾が $1/n!$ であるものを考え V_j と書く。すると

$$\sum \delta(V_j)^{\alpha} = \frac{(n-1)!}{(n!)^{\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \alpha = 1 \\ \infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

ここで，$x+y = \mathrm{Const.}$ $0 \le x, y$ の時に $x^{\alpha} + y^{\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$ の最小値は $x = y$ の時である事に注意すれば，$\dim(X) = 1$ を得る。

2-2. r-deterministic sequences

r を 2 以上の自然数として，実数を r 進展開したとする。

$$x \in I_0, \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i(x)}{r^i}, \qquad 0 \le \omega_i(x) \le r-1 \quad \forall i \ge 1.$$

r 進正規数の全体を $B(r)$ と書く時に，$B^{\perp}(r)$ を

$$B^{\perp}(r) = \{x \in \mathbb{R} ;\ x + B(r) \subset B(r)\}$$

と定義する時に，$B^{\perp}(r)$ は以下の様に特徴付けられる。Rauzy[ ]

$$\forall x \in B^{\perp}(r) \qquad \lim_{s\to\infty} \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\varphi \in E_s} \sum_{n=1}^{N} \inf\left(1, |\omega_n(x) - \varphi(\omega_{n+1}, -, \omega_{n+s})|\right) = 0.$$

但し E_s は $\{0,1,--,r-1\}^s \longrightarrow \{0,1,--,r-1\}$ への関数全体とする。

この $x \in B^{\perp}(r)$ を r-deterministic と呼び，$\omega_1(x), \omega_2(x), ---$ が，

Kamae - Weiss の意味で deterministic であることと同値である。
我々は M. Bernay [2] に従い，次の定理2を得る。

<u>Theorem 2.</u> $\dim B^{\perp}(\tau) = 0$.

まず前節 Prop. 1 から直ちに導びかれる H-dim. の性質を示す。

<u>Proposition 3.</u> X, Y, X_n を可分距離空間の部分集合として

(i) $X \subset Y$ ならば $\dim X \leq \dim Y$.

(ii) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ならば，$\dim X = \sup_n \dim X_n$

<u>Proposition の証明.</u> (i) は明らか。 (i) から $\dim X \geq \sup \dim X_n$.
一方全ての n に対して $\dim X_n < \alpha$ ならば，$m_\alpha(X_n) = 0$ であり，
$m_\alpha(\cdot)$ の劣加法性より $m_\alpha(\bigcup_n X_n) = 0$. ゆえに $\dim \bigcup_n X_n \leq \alpha$.
つまり $\dim \bigcup_n X_n = \dim X \leq \sup_n \dim X_n$. ■

<u>定理の証明.</u> $B^{\perp}(\tau)$ は $x \mapsto x+1$ に対し不変であり，Prop. 3 (ii) から $B_0^{\perp}(\tau) = B^{\perp}(\tau) \cap I_0$ の次元が零であることを示せば良い。

$$\nu(N, x, \varphi) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \omega_n(x) = \varphi(\omega_{n+1}(x), \cdots, \omega_{n+s}(x))}} 1$$

と置くと $x \in B_0^{\perp}(\tau)$ は

$$\lim_{s \to +\infty} \varliminf_{N \to +\infty} \sup_{\varphi \in E_s} \frac{\nu(N, x, \varphi)}{N} = 1$$

と同値になる。

$$A(N_0, s, \varepsilon) = \bigcap_{N \geq N_0} \bigcup_{\varphi \in E_s} \{ x \in I_0 \, ; \, \nu(N, \varphi, x) > N(1-\varepsilon) \}$$

とおくと，$0 < \varepsilon < 1$，N_0, s は1以上の整数，

$$B_0^{\perp}(\tau) = \bigcap_{0<\varepsilon<1} \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcup_{N_0=1}^{+\infty} A(N_0, s, \varepsilon)$$

となり，次の二つの Lemmas から証明は直ちに出る。

LEMMA 1. $\dim A(N_0, s, \varepsilon) \leq \gamma(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{\log r}\left\{\varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)\right\}$

LEMMA 2. $\binom{N}{[N(1-\varepsilon)]} \leq K(\varepsilon)\left\{\varepsilon^{\varepsilon}(1-\varepsilon)^{1-\varepsilon}\right\}^{N}$

$K(\varepsilon)$はεのみに依る定数.

STIRLINGの公式からLEMMA 2を容易に導びくことができる。

LEMMA 1の証明. $N \geq N_0$ として,

$\omega^{(N)} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{N+s}) = \{0, 1, \cdots, r-1\}^{N+s}$ とおいて

$a(\omega^{(N)}) = \omega_1 r^{N+s-1} + \omega_2 r^{N+s-2} + \cdots + \omega_{N+s}$ と定める。

$\varphi \in E_s$ に対して

$$\Omega(\varphi, N) = \left\{\omega^{(N)}\ ;\ \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \omega_n = \varphi(\omega_{n+1}, \cdots, \omega_{n+s})}} 1 \geq [N(1-\varepsilon)] + 1\right\}$$

と置くと,

$$A = A(N_0, s, \varepsilon) \subset \bigcup_{\varphi \in E_s} \bigcup_{\omega^{(N)} \in \Omega(\varphi, N)} \left[\frac{a(\omega^{(N)})}{r^{N+s}}, \frac{a(\omega^{(N)})+1}{r^{N+s}}\right)$$

ここから $0 < \alpha < 1$ として,

$$m_\alpha(A) \leq r^{r^s} \lim_{N \to \infty} \frac{\#\Omega(\varphi, N)}{r^{(N+s)\alpha}}$$ であり.

$$\#\Omega(\varphi, N) = \binom{N}{[N(1-\varepsilon)]+1} r^{N+s-1-[N(1-\varepsilon)]}$$. LEMMA 2から

$m_\alpha(A) \leq C \lim_{N \to \infty} \left(\frac{r^{\varepsilon-\beta}}{\varepsilon^{\varepsilon}(1-\varepsilon)^{1-\varepsilon}}\right)^{N}$. Cは$s, \varepsilon, \beta$に依る定数.

よってもし $\alpha > \varepsilon - \frac{1}{\log r}\left\{\varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)\right\}$ ならば $m_\alpha(A) = 0$

であり, これはLEMMA 1を示している。 ■

$\forall \varepsilon \in (0,1)$ に対して， $\dim B_0^{\perp}(\tau) \leq \sup_{s \geq 1} \sup_{N_0 \geq 1} \dim A(N_0, s, \varepsilon)$
である。（Prop. 3 と $B_0^{\perp}(\tau)$ の表現より。） Lemma 1 から

$$\dim B_0^{\perp}(\tau) \leq \gamma(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0) \qquad \blacksquare$$

2-3. ハウスドルフ次元と Lipschitz 条件.

ここではまずハウスドルフ次元の定義が妥当なものである一つの例として，3次元ユークリッド空間に於けるある程度滑らかな曲面のハウスドルフ次元が2であることを見よう。
(x, y) が平面の単位正方形を動くとして，X が $z = f(x, y)$ で与えられたとせよ。（$X = \{(x, y, z) ;\ z = f(x, y)\ \ 0 \leq x, y \leq 1\}$） X が直径 d_i の球 S_i でおおわれているとし，X の x-y 平面の射影を PX とすると単位正方形（面積 1）となり，$\{PS_i\}$ は PX をおおう。
よって $\sum_i \pi d_i^2/4 \geq 1$ i.e. $\sum_i \mathrm{diam}(S_i)^2 = \sum_i \delta(S_i)^2 \geq 4/\pi$ $m_2(X) > 0$
つまり $\dim X \geq 2$ である。逆向きの不等式を証明するには例えば f に Lipschitz 条件 $\omega_f(\delta) = O(\delta)$ を仮定すればよい。ここで $\omega_f(\delta) = \sup\{\, |f(x, y) - f(x', y')| ;\ |x - x'| \leq \delta,\ |y - y'| \leq \delta \,\}$
条件より $\exists K > 0$, $\omega_f(\delta) < K\delta$。単位正方形を1辺 $1/n$ の n^2 個に分割すると，この小正方形上の f の変動は K/n より小さい。
よって曲面 X はその小正方形の上では一辺 K/n の立方体，$\sqrt{3}K/n$ の球に含まれる。このCovering に対して，$\sum (\mathrm{diam}\, S_i)^{2+\varepsilon}$
$= n^2 \cdot (\sqrt{3}K)^{2+\varepsilon} / n^{2+\varepsilon} = (\sqrt{3}K)^{2+\varepsilon} / n^{\varepsilon} \to 0\ (n \to +\infty)$ i.e. $m_{2+\varepsilon}(X) = 0$.

これは $\dim X \leq 2$ を意味する。($\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれる。)すると $\dim X \gneq 2$ となる f は存在するであろうか。この問題に対する解答は知られていない。

一方直線上のコンパクト集合 E と、そのハウスドルフ次元との間には次の関係がある。

定理3. 直線上のコンパクト集合 E のハウスドルフ次元は次の β を上界に持つ。但し β は E 上の正値測度 $d\mu \neq 0$ の微分のリプシッツ・オーダーである。

証明は省略するが、これも基本的な定理の一つである。

2-4. 未解決の問題

直線上の集合に対しては、実数の展開の立場から特徴付けてその次元を考えられていることが、2-1で示されたが、ここでは少し違った見方で捕えることにする。区間 $[a, b]$ を取り、$0 \leq \eta_{1,k} < \eta_{2,k} < \cdots < \eta_{\nu_k,k} < 1$ なる $\underline{\eta}_k = (\eta_{1,k}, \cdots, \eta_{\nu_k,k})$ の列と、$\xi_k > 0$、$\xi_k < \eta_{2,k} - \eta_{1,k}, \cdots, \xi_k < \eta_{\nu_k,k} - \eta_{\nu_k-1,k}$ なる $\{\xi_k\}$ が与えられたとして $[a, b]$ から次の手続きに従って区間を抜き出す。まず第一番目のステップでは、$l = b - a$ として互いに交わらない ν_1 個の区間 $[a + l\eta_{j,k}, a + l\eta_{j+1,k})$ から $[a + l\eta_{j,k}, a + l\eta_{j,k} + l\xi_k]$ の区間(白い区間)を残す。残った集合を E_1 と書く。第二ステップは、E_1 の各白い区間に

$(\underline{\eta}_2, \xi_2)$ を $(\underline{\eta}_1, \xi_1)$ に考えて各白い区間から ν_2 個の白い区間を残して E_2 を得る。 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ とおくと，$\mu_0 E = \lim_{k\to\infty} l(\nu_1\xi_1 \cdots \nu_k\xi_k)$ となる。 特に $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = 1/3$ ，$\underline{\eta}_1 = \underline{\eta}_2 = \cdots = (0, 2/3)$ …の場合にはカントール集合になる。 この種の完全集合に対しては，次元論は勿論の事（$\nu_k = \nu$，$\xi_k = \xi$ $\forall k$ に対して，$\dim E = \log\nu / -\log\xi$ ）E上に自然に導入された測度に対して細かなフーリエ解析の理論がある。（SALEM [11]，KAHANE-SALEM [7]，MEYER, YVES [8]）。 一口に言えば区間から一定の手続きによって区間（黒色に塗るとしよう。）を抜き出して，最後には白い区間が残らないようにする。 そして目には見えない白い点が残ってそれをEと名付けておいたが，その残り具合の濃さを厳密に考察している訳である。 ところが，直線上の区間からいったん離れて，円（一般に n 次元球）から出発して，適当な抜き方（円，又は球を区間の代りに与える。）で測度（ルベーグ測度）は零にすることは可能である。 ところがこの残った集合のハウスドルフ次元については，何も知られていない。 この種の問題（他に例えばパッキングとか，駐車の問題等）では，直線と空間との差は本質的と思われる。

§3. ハウスドルフ次元の計算法(II)

2-1. で示された実数の展開に関連した集合に対して有効な計

算法はBILLINGSLEY, P.によるもので、展開された各項の統計的な振舞いに注目した点に特色がある。

3-1. BILLINGSLEYの定理.

2-2.で r-deterministic sequences を議論した時のように、単位区間 I_0 に限ってよい。ここでまず次元を定義した際の ρ-Covering の取り方を制限しても同じ次元を与えることをまず注意しておく。勝手な Open Covering としたのを Open ball としてもよい。すると単位区間の場合には開区間になるがそれを $U=[j/r^n, j+1/r^n)$ $j=0,1,\cdots,r^n-1$ の形の r 進展開の筒集合 $\{x; a_k(x)=i_k, k=1,2,\cdots,n\}$ $x=\sum a_k(x)/r^k$ に制限してみよう。($m_p'^{\rho}(X)$ と書く。1-3.参照) すると

$$m_p^{\rho}(X) \leq m_p'^{\rho}(X) \leq (r+1)\, m_p^{\rho}(X)$$

が成立し，ハウスドルフ次元の同値な定義を与える。ここで 2-1. の集合 X に対しては，上式は成立しないことに注意されたい。同値な定義ができたので，これを一般化する。

μ を単位区間の Borel 集合上の確率測度とし，但し点測度は持たないとする。そして diameter $\delta(\cdot)$ の代りに，$\mu(\cdot)$ を用いても本来のハウスドルフ次元とほぼ同様の性質が成り立ち，$\mu=\mu_0$ ルベーグ測度の場合には一致するので，確率測度 μ を用いたハウスドルフ次元を $\dim_\mu(\cdot)$ と書く。すると次の約

束 $\begin{cases} \log\xi/\log 0 = \log 1/\log\eta = \log 1/\log 0 = 0 \\ \log 0/\log\eta = \log\xi/\log 1 = \log 0/\log 1 = \infty \\ \log 0/\log 0 = \log 1/\log 1 = 1 \end{cases}$ $\quad 0<\xi,\eta<1$

の下に次の定理が成立する。

THEOREM 4. 定数 $0 \le \delta \le \infty$ に対して

$$X \subset \left\{ x;\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(U_n(x))}{\log \mu(U_n(x))} = \delta \right\}$$

ならば，
$$\dim_\mu X = \delta \dim_\nu X$$
である。 μ, ν は I_0 上の点測度を持たない．確率測度であり，$U_n(x)$ は，x を含む長さ $(1/r^n)$ の简集合である。($u_n(x)$ とも書く。)

まず古典的な EGGLESTON の結果が大数の強法則を利用してこの定理から直ちに出ることを示そう。 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)/r^i$ の時，$A_N(x;j) = \#\{ i \le N;\ a_i(x) = j \}$ $0 \le j \le r-1$ として，$M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1}) = \{ x \in I_0;\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A_N(x;j) = p_j \quad j = 0,1,\cdots,r-1 \}$ と置くと，

THEOREM 5 (EGGLESTON) $\quad \dim M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1}) = -\frac{1}{\log r} \sum_{i=0}^{r-1} p_i \log p_i.$

証明 $\mu = \mu_0$ ルベーグ測度とし，ν は $a_n(\cdot)$ が ν の下で独立・同分布 $\nu\{x;\ a_n(x) = j\} = p_j$ に従うような確率測度とすると．大数の強法則により $\nu(M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1})) = 1$，よって $\dim_\nu M = 1$． 一方 $x \in M$ に対して

$$-\frac{1}{n} \log \nu(U_n(x)) = -\sum_{i=0}^{r-1} \frac{A_n(x;j) \log p_j}{n} \longrightarrow -\sum_j p_j \log p_j.$$

$$\frac{\log \nu(v_n(x))}{\log \mu_0(v_n(x))} = -\frac{1}{n\log r}\cdot \log \nu(v_n(x)) \to -\frac{1}{\log r}\sum_j p_j \log p_j \quad \blacksquare$$

この結果は，SHANNONの意味のエントロピーと一致していることや，SHANNON－McMILLAN－BREIMANの定理を見ると，エントロピーとの関係がよくわかる。

3-2. BILLINGSLEYの定理の応用

前節の $M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1})$ で $p_i = 1/r$ $(i=0,1,\cdots,r-1)$ となる $x \in M(1/r,\cdots,1/r)$ を r 進単純正規数と呼ぶ。 r 進単純正規数の集合はルベーグ測度1で，従ってハウスドルフ次元も1である。 定理5とPROP. 3から r 進単純正規数でない集合 X の次元を計算できる。 つまり $X = \bigcup_{\exists p_i \neq 1/r} M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1})$ で

$$\dim X = \sup_{\substack{\exists i \\ p_i \neq 1/r}} \dim M(p_0, p_1, \cdots, p_{r-1}) = 1 .$$

$\pi = (p_{ij})_{r\times r}$ $p_{ij} \geq 0$, $p_i = \sum_j p_{ij}$, $\sum_i p_i = 1$ を満たす確率行列とし，

$A_N(x;\langle ij\rangle) = \#\{k \leq N ;\ a_k(x) = i,\ a_{k+1}(x) = j\}$ として

$M(\pi) = \left\{ x \in I_0 ;\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{A_n(x;\langle i,j\rangle)}{n} = p_{ij},\ 0 \leq i,j \leq r-1 \right\}$ とおくと

定理4から， $\dim M(\pi) = -\dfrac{1}{\log r}\sum_{i,j} p_i p_{ij} \log p_{ij}$ がわかる。

今は二つの連続した展開の相対頻度に着目したが，任意の長さのdigitsの出現する相対頻度が $1/r^n$ （n はdigitsの長さ）

になるような x を r 進正規数 $B(r)$ と定義する。 すると r 進単純正規で r 進正規でない集合の次元も 1 になる。 それは

$$M(1/r, 1/r, \cdots 1/r) - B(r) \supset \bigcup_{\substack{\exists i, j \\ P_j \neq 1/r \\ P_i = 1/r}} M(\pi) \quad \text{で} \quad \dim\left(M(1/r, \cdots, 1/r) - B(r)\right)$$

$$\geq \sup \dim M(\pi) = 1 \text{ を得る。}$$

全ての r に対して r 進正規数となる集合 $\bigcap_{r=2}^{\infty} B(r)$ もルベーグ測度 1 だが，$\bigcap_{r=2}^{\infty} B(r) - B(r)$ の次元については知られていない。 他に相対頻度 α であらかじめ digit が決められた値に一致しているような集合 $M(\alpha)$ の次元が $1-\alpha$ になることとか，長さ l 以上の連（run）が決して出現しないような集合 $M(l)$ の次元は

$$\dim M(l) = \frac{1}{l \log r} \sum_{k=1}^{l} \frac{\left[r^{l-k-1}(r-1)\right]}{r^{l-1}} \log\left(r^{l} - r^{k-1}\right)$$

になることが，NAGASAKA [9] に示されている。

§4. ハウスドルフ次元の計算法（III）

BILLINGSLEY の定理は r 進展開に関連する集合の次元の計算には極めて強力であったが，第4章では確率測度の概念からは離れて変換 T_k により次元を計算する W. A. BEYER [1] の定理とその応用について見ることにする。

4-1. BEYER の定理.

単位区間 I_0 を考え，$x \in I_0$ が r 進展開 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)/r^i$ されて

いるものとする。 $r=2$ の場合には特に $a_i(x)$ の代りに $\varepsilon_i(x)$ と書き又 $r_i(x)=1-2\varepsilon_i(x)$ を Rademacher 関数とし，後に $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i(x)$ の統計的な振舞いについて言及する。 さて変換 T_k は，

<u>DEFINITION</u> $T_k : I_0 \longrightarrow \underbrace{I_0 \times \cdots \times I_0}_{k\text{回}}$ の写像で，

$$I_0 \ni x \longmapsto T_k(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_k^1(x) \\ \vdots \\ T_k^k(x) \end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$$T_k^j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik+j}(x) \,/\, r^{i+1} \text{ で定義される。}$$

この変換 T_k に関して次の定理が成立する。

<u>THEOREM 6.</u> (W. A. BEYER) $X \subset I_0$ とすると，

$$\dim X = \frac{1}{k} \dim T_k X .$$

この定理から BEYER は digit の $ki+K$ ($i=i_0, i_0+1, \cdots$) 以降が与えられた数 b の展開に等しい i.e. $a_{ki+K} = a_{i-i_0+1}(b)$, $i \geq i_0$ ような集合のハウスドルフ次元が $1/k$ 以上であることを注意しているが，$k>2$ ならば簡単に $(k-1)/k$ 以上になる事がわかる。いずれにせよこの注意は 3-2. の NAGASAKA の結果の特殊な例に過ぎない。 又単純正規数でない集合の次元が 1 であることを，上記定理より導出することは可能である。 又 BEYER は 2 進展開に限って話を進めているのだが，次のような集合を考察している。 $B=\left\{x \in I_0 ;\ \limsup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i(x) \gneq \liminf_n \frac{1}{n}\sum r_i(x)\right\}$ と置くと，殆んど全ての x に対し，上の $\limsup = \liminf = 0$

が成立するので $\mu_0 B = 0$ となる。 しかし $\dim B = 1$ となる。

このタイプの確率法則としてすぐに想起されるのは，重複対数の法則である。 つまり $L(1) = \{x \in I_0 ; \limsup_n \frac{|\Delta_n(x)|}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1\}$ と書くと $\mu_0 L(1) = 1$ である。 前にならって，
まず重複対数の法則を満たさない集合の次元を考える。 ここで $\overline{L}(\alpha) = \{x \in I_0 ; \limsup_n \frac{|\Delta_n(x)|}{\sqrt{2n \log\log n}} \geq \alpha\}$ とすると

<u>THEOREM 7</u> 任意の $\alpha \geq 0$ に対して，$\dim \overline{L}(\alpha) = 1$.
特に $\dim(I_0 - L(1)) = 1$ である。

<u>証明.</u> $M(\nu_0, \nu_1)$ のうち $\nu_0 > 1/2$, $\nu_1 < 1/2$ となるものを考えると，
$x \in M(\nu_0, \nu_1)$, $\nu_0 > 1/2$ に対して $\limsup \frac{|\Delta_n(x)|}{\sqrt{2n \log\log n}} = \infty$ となるから，

$\overline{L}(\alpha) \supset \bigcup_{\nu_0 > 1/2} M(\nu_0, \nu_1)$ で，Prop. 3 より証明を終る。 ■

前の定理5では，エントロピーとの関係が見られて，興味深い結果を得たが，重複対数の場合には次の定理からわかるように、ハウスドルフ次元との関係はあまり無い。 つまり

<u>THEOREM 8.</u> 任意の $\alpha > 0$ に対して，

$$\dim L(\alpha) = 1.$$

<u>証明.</u> まず，$\dim T_k L(1) = k \dim L(1) = k$ である。
次に $x \in I_0$ として，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n(x)|}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sqrt{k+1}\,\alpha - \sqrt{k}$$

を満たすもの

を取る。存在はそれ程難しくなく証明できる。又 k は十分大きな任意の自然数としておく。

$E_{k+1} = T_k L(1) \times \{x\}$ とおくと，$\dim E_{k+1} = k$ でしかも，$L(\alpha) \supset T_{k+1}^{-1} E_{k+1}$ である。実際 $y \in T_{k+1}^{-1} E_{k+1}$ を取ると

$$\frac{|S_n(y)|}{\sqrt{2n\log\log n}} = \frac{|S_{m(k+1)+r}(x)|}{\sqrt{k+1}\,\left(\sqrt{2m\log\log m} + o(1)\right)}$$ ($n = m(k+1)+r$ とする。)

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\limsup} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\,\alpha - \sqrt{k}\right) = \alpha .$$

(i.e. $m\to\infty$)

一方 BEYER の定理により，

$$\dim L(\alpha) = \frac{1}{k+1} \dim T_{k+1} L(\alpha) \ \geq \frac{1}{k+1} \dim E_{k+1} = \frac{k}{k+1} .$$

ここで k を任意に大きく取れるから $\dim L(\alpha) = 1$ を得る。■

よって残された場合は，$\alpha = 0$ の場合という事になる。

以上主として r 進展開の場合の計算法とその応用について述べて来たが，他にも一般の展開に対応する定理（THOMAS）や連分数等に関する種々の結果があるが，それらの関連や応用については他の機会に残すことにする。

29 / 3 / 77 .

REFERENCES

[1] BEYER, W. A. (1962): Hausdorff dimension of a level set of some Rademacher series, Pacific J. of Math., 12, 35-46.

[2] BERNAY, M. (1975): Dimension de Hausdorff des nombres r-deterministes, C. R. A. S. Paris, 280, 539-542.

[3] BILLINGSLEY, P. (1965): Ergodic theory and Information. John Wiley &Sons.

[4] EGGLESTON, H. G. (1949): The fractional dimension of a set defined by decimal properties, Quarterly J. of Math., Oxford Series, 20, 31-36.

[5] ERDOS, P. and KAKUTANI, S. (1955): On a perfect set, .

[6] HAUSDORFF, F. (1919): Dimension und ausseres Mass, Math. Ann. 79, 157-179.

[7] KAHANE, J. -P. et SALEM, R. (1969): Ensembles parfaits et series trigonometriques, Hermann, Paris.

[8] MEYER, I. (1972): Algebraic numbers and harmonic analysis, North Holland.

[9] NAGASAKA, K. (1971): On Hausdorff dimension of non-normal sets, Ann. Inst]

[9] NAGASAKA, K. (1971): On Hausdorff dimension of non-nopmal sets, Ann. Inst. Stat. Math., 23-3, 515-521.

[10] NAGASAKA, K. (1977): L'estimation de dimension de Hausdorff des certains ensembles, Res. Memo. No. 103, Inst. Stat. Math.

[11] SALEM, R. (1961): Algebraic numbers and Fourier analysis, HEATH Mathematical Monograph.