数理解析研究所講究録
第295巻 1977年 1-11

変数係数二次形式のゼータ函数について

(附記. 不定値の Siegel Modular)

名大 理 鈴木利明

L_2 を n 次元縦ベクトル空間 V_2 の lattice とし、L_1 を size n の対称行列の空間 V_1 の lattice とする。L_1 の非退化な元 X_1 に次のような不定値二次形式 $\underbrace{\eta_j}_{\text{のゼータ函数}}(s, L_2, X_1)$ $(j=\pm 1)$ を対応させる。$(s\in\mathbb{C})$

$$\eta_j(s, L_2, X_1) = \sum_{\substack{X_2\in L_2 \\ \operatorname{sgn} X_1[X_2]=j}} \mu_{X_1}(X_2)\,|X_1[X_2]|^{-s}$$

ここで、$G(X_1)=\{g\in GL(n;\mathbb{R});\ X_1[{}^t g]=X_1\}$ 上の Haar 測度 dg_{X_1} が

$$\int_{GL(n;\mathbb{R})} f(g)\,dg = \int_{GL(n;\mathbb{R})/G(X_1)} |X_1[{}^t\dot{g}]|^{-\frac{n+1}{2}}\, dX_1[{}^t\dot{g}] \int_{G(X_1)} f(\dot{g}g)\,dg_{X_1}$$

$$\left(dg = |\det g|^{-n} \prod_{1\le i,j\le n} dg_{ij} \qquad f\in L^1(GL(n;\mathbb{R}))\right)$$

で~~定義~~正規化され~~るとき~~ている時に定まる $\mu_{X_1}(X_2)$ とする。（[1] 参照）

ここで，ゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$，$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ を次のように定義する。

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{\substack{X_1 \in L_1/\sim \\ \mathrm{sgn}\, X_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, X_1)\, \|X_1\|^{-s_1 - \frac{1}{2}}$$

$$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L}) = \sum_{\substack{Y_1 \in L_1^*/\sim \\ \mathrm{sgn}\, Y_1 = (i, n-i)}} \eta_j(s_2, L_2, Y_1^c)\, \|Y_1\|^{-s_1 - \frac{n-1}{2}}$$

$s_2 \in \mathbb{C}$　$(0 \leqq i \leqq n)$

但し，$L = L_1 \oplus L_2$，$\bar{L} = L_1^* \oplus L_2$，$L_1^*$ は L_1 の *dual lattice* で，$\|X_1\|$ は $\det X_1$ の絶対値，Y_1^c は Y_1 の余因子行列，$L_1/\sim$ は $\Gamma = GL(n;\mathbb{Z})$ の作用についての軌道の代表系とする。

上記のゼータ函数 $\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$，$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は，実は下記の概均質ベクトル空間 (G, ρ, V)，$(G, \bar{\rho}, \bar{V})$ から定義されるゼータ函数になっていることが簡単に示される。

$$G = GL(n, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R}), \quad V = V_1 \oplus V_2, \quad \bar{V} = V_1^* \oplus V_2$$

$$\rho(g, h)(X_1, X_2) = (X_1[{}^t g],\ {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$\bar{\rho}(g, h)(Y_1, X_2) = (Y_1[g^{-1}],\ {}^t g^{-1} X_2 h)$$

$$g \in GL(n, \mathbb{R}),\ h \in GL(1, \mathbb{R}),\quad X_1 \in V_1,\ Y_1 \in V_1^*,\ X_2 \in V_2$$

$G_+ = GL(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}_\times^+$ として，その上のHaar測度 dG_+ を

$$dG_+ = |\det g|^{-n}\, h^{-1} \prod_{1\le i,j\le n} dg_{ij}\; dh$$

で定義する。$G^+_{X_1,X_2} = \{(g,h)\in G^1_+ \,;\, \rho(g,h)(X_1,X_2)=(X_1,X_2)\}$，$G^+_{Y_1,X_2} = \{(g,h)\in G^1_+ \,;\, \bar\rho(g,h)(Y_1,X_2)=(Y_1,X_2)\}$ として，それぞれの上のHaar測度を次のように正規化しておく。

$$\int_{G_+} f(g,h)\,dG_+ = \int_{G_+/G^+_{X_1,X_2}} \|X_1[{}^t\dot g]\|^{-\frac{n}{2}}\, |X_1[{}^t\dot g][{}^t\dot g^{-1}X_2h]|^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(X_1[{}^t\dot g])\,d({}^t\dot g^{-1}X_2h)\int_{G^+_{X_1,X_2}} f(\dot g g,h)\,d\nu_{X_1,X_2}(g)$$

$$\int_{G_+} f(g,h)\,dG_+ = \int_{G_+/G^+_{Y_1,X_2}} \|Y_1[\dot g^{-1}]\|^{-1}\, |Y_1[\dot g^{-1}]^c[{}^t\dot g^{-1}X_2h]|^{-\frac{n}{2}}$$

$$d(Y_1[\dot g^{-1}])\,d({}^t\dot g^{-1}X_2h)\int_{G^+_{Y_1,X_2}} f(\dot g g,h)\,d\nu_{Y_1,X_2}(g)\,.$$

L，$\bar L$ は Γ の作用 ρ，$\bar\rho$ で不変であるとする。$L_{ij} = \{(X_1,X_2)\in L \,;\, \mathrm{sgn}\,X_1=(i,n-i),\ \mathrm{sgn}\,X_1[X_2]=j\}$，$\bar L_{ij} = \{(Y_1,X_2)\in \bar L \,;\, \mathrm{sgn}\,Y_1=(i,n-i),\ \mathrm{sgn}\,Y_1^c[X_2]=j\}$．$L_{ij}/\sim$ は Γ の作用 ρ による軌道の代表系とする。このとき，$\xi_{ij}(s_1,s_2,L)$，$\bar\xi_{ij}(s_1,s_2,\bar L)$ は次のようにも定義することが出来る。

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{(X_1, X_2) \in L_{ij}/\sim} \mu(X_1, X_2) \| X_1 \|^{-s_1} | X_1[X_2] |^{-s_2}$$

$$\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, L) = \sum_{(Y_1, X_2) \in \bar{L}_{ij}/\sim} \mu(Y_1, X_2) \| Y_1 \|^{-s_1} | Y_1^c[X_2] |^{-s_2}$$

但し $\mu(X_1, X_2) = \int_{G^+_{X_1, X_2}/\Gamma_{X_1, X_2}} d\nu_{X_1, X_2} \quad (\Gamma_{X_1, X_2} = \Gamma \cap G^+_{X_1, X_2})$

$$\mu(Y_1, X_2) = \int_{G^+_{Y_1, X_2}/\Gamma_{Y_1, X_2}} d\nu_{Y_1, X_2} \quad (\Gamma_{Y_1, X_2} = \Gamma \cap G^+_{Y_1, X_2}) \quad .$$

定理. 1) $n \geqq 4$ のとき、正の数 A, B があって、$Re(s_1) > A$ かつ $Re(s_2) > B$ のとき、$\xi_{ij}(s_1, s_2, L)$, $\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$ は絶対収束して、そこで、(s_1, s_2) についての正則函数を表わす。

2) ξ_{ij}, $\bar{\xi}_{ij}$ は全平面 $\mathbb{C}^2$ に解析接続されて、有理型函数となり、次の函数等式を満足する。

$$\bar{\xi}_{ij}\left(\frac{n+1}{2} - s_1 - s_2, s_2, \bar{L}\right) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1 - s_2} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$\exp\left(\pi i \frac{ns_1 + s_2}{2}\right) \Gamma(s_1)\Gamma(s_1 - \tfrac{1}{2}) \cdots \Gamma(s_1 - \tfrac{n-2}{2}) \Gamma(s_1 + s_2 - \tfrac{n-1}{2})$$

$$\sum_{\substack{0 \leqq l \leqq n \\ k = \pm 1}} A_{lk, ij}(s_1, s_2)\, \xi_{lk}(s_1, s_2, L)$$

$$(0 \leqq i \leqq n, \ j = \pm 1)$$

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L^*) = v(L_2^*)^{-1}\, \pi^{2s_2-\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\!\left(\tfrac{n}{2}-s_2\right)\Gamma(1-s_2)$$

$$\sum_{k=\pm 1} B_{k,i}^{i}(s_2)\, \bar{\xi}_{ik}\!\left(s_1+s_2-\tfrac{n-1}{2},\ \tfrac{n}{2}-s_2,\ \bar{L}\right)$$

$$(0 \leqq i \leqq n,\ j=\pm 1)$$

但し $v(L_1^*) = \int_{V_1^*/L_1^*} dY_1$ ， $v(L_2^*) = \int_{V_2^*/L_2^*} dY_2$ $\left(dY_1 = \prod_{i,j} dy_1^{ij},\right.$

$\left. dY_2 = \prod_{i=1}^{n} dy_2^{i} \right)$

3)

$$\xi_{ij}(s_1, s_2, L)\left(s_1+s_2-\tfrac{n-3}{2}\right)(s_1-1)\left(s_1-1-\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(s_1-1-\tfrac{n-2}{2}\right)$$

$$(s_1-2)\left(s_1-2-\tfrac{1}{2}\right)\cdots\left(s_1-2-\tfrac{n-2}{2}\right)(s_2-1)\left(s_2-\tfrac{n}{2}\right)$$

$$,\quad \bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})\,(s_1-1)(s_1-2)\left(s_1+s_2-1-\tfrac{1}{2}\right)\left(s_1+s_2-1-\tfrac{2}{2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(s_1+s_2-1-\tfrac{n-1}{2}\right)(s_2-1)\left(s_2-\tfrac{n}{2}\right) \qquad (0 \leqq i \leqq n,\ j=\pm 1)$$

は全平面 $\mathbb{C}^2$ で整関数となる。また、$\mathrm{Re}(s_1)$ を充分大にしておけば

$$\lim_{s_2 \to \frac{n}{2}} \left(s_2-\tfrac{n}{2}\right)\xi_{ij}(s_1, s_2, L) = v(L_2)^{-1}\,\xi_i\!\left(s_1+\tfrac{1}{2},\ L_1\right)$$

$$\lim_{s_2 \to \frac{n}{2}} \left(s_2-\tfrac{n}{2}\right)\bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L}) = v(L_2)^{-1}\,\xi_2\!\left(s_1+\tfrac{n-1}{2},\ L_1^*\right)$$

を得る。

また、$\mathrm{Re}(s_1)$ が充分大なるとき、 $(1 \leq i \leq n-1)$

$$\lim_{s_2 \to 1} (s_2 - 1)\, \xi_{ij}(s_1, s_2, L)$$

$$= v(L_2)^{-1}\, \bar{\xi}_i^{(0)}\left(s_1 + \tfrac{1}{2},\, L_1 \oplus L_2^*\right) \pi^{1-\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\tfrac{n}{2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \sin \pi \frac{n-i}{2} & \text{if } j = +1 \\ \sin \pi \frac{i}{2} & \text{if } j = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{s_2 \to 1} (s_2 - 1)\, \bar{\xi}_{ij}(s_1, s_2, \bar{L})$$

$$= v(L_2)^{-1}\, \xi_i^{(0)}\left(s_1 + \tfrac{1}{2},\, L^*\right) \pi^{1-\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\tfrac{n}{2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \sin \pi \frac{n-i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i} \\ \sin \pi \frac{i}{2} & \text{if } j = (-1)^{n-i+1} \end{cases}$$

但し、$\bar{\xi}_i^{(0)}$, $\xi_i^{(0)}$ は、不定値二次形式のゼータ函数の $s = 1$ における留数から作られるゼータ函数であって、次のような函数等式を満足する。

$$\xi_i^{(0)}\left(\tfrac{n}{2} - s_1,\, L^*\right) = v(L_1^*)^{-1} (2\pi)^{-ns_1 - 1} \exp\left(2\pi i \tfrac{ns_1 + 1}{4}\right)$$

$$\Gamma(s_1) \cdots \Gamma\left(s_1 - \tfrac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(s_1 - \tfrac{n-3}{2}\right) \quad \pi^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

$$\sum_{1 \leq l \leq n-1} A_{lk\,ij}(s_1, 1)\, \bar{\xi}_k^{(0)}\left(s_1 + \tfrac{1}{2},\, L_1 \oplus L_2^*\right)$$

（附記）　不定値（対称行列）の Siegel modular について

ここで、T は半整数係数の対称行列，$a(T)$，$b(T)$ を，その絶対値が $\|T\|$ の多項式でおさえられる列で、$a(U T {}^tU) = a(T)$ $b(UT{}^tU) = b(T)$ （$U \in \Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$，$n$ は T の size $n \geqq 3$）を満たすものとする。［Ｉ］，［II］の記号に従って，次のような Dirichlet 級数を定義する。（これらは $\mathrm{Re}\, s$ が大なら絶対収束）

$$\xi_i(s) = \sum_{\substack{\{T\} \\ \mathrm{sgn}\, T = (i, n-i)}} a(T)\mu(T)\|T\|^{-s}$$

$$\xi'_i(s) = \sum_{\substack{\{T\} \\ \mathrm{sgn}\, T = (i, n-i)}} b(T)\mu(T)\|T\|^{-s} \qquad 0 \leqq i \leqq n$$

（和は Γ の作用による代表系を動く）

以下，$V = \{X ;\ X$ は size n の対称行列$\}$，$S = \{X \mid |X| = 0\}$

$dv = \|X\|^{-\frac{n+1}{2}} dX$，（$dX = \prod_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} dx_{ij}$　$X = (x_{ij})$），$M_n = |X|\left|\frac{\partial}{\partial X}\right|$

$f \in C_0^\infty(V - S)$，$\check{f}(X) = f(X^{-1})$

$$\hat{f}(Y) = \int e^{2\pi i \sigma(X \cdot Y)} f(X)\, dv \qquad (\text{但し } \sigma \text{ は trace}).$$

と記号を決め，また簡単のため

(i)　$M_n \|X\|^s = b(s)\|X\|^s$

$$\Phi_i(\hat{f}, s) = \int_{\mathrm{sgn}\, X = (i, n-i)} f(X)\|X\|^s dv$$

$$(2)\quad \Phi_i(\hat{f}, s) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij}(s)\, \Phi_j(f, -s)$$

と書くことにする。

定理　いま、V − S 上の distribution としての関係式

$$(3)\quad \sum_{T} a(T) e^{2\pi i \sigma(T\cdot X^{-1})} = |X|^{k} \sum_{T} b(T) e^{2\pi i \sigma(T\cdot X)}$$

（kは正の整数）

が成立するならば、$\xi_i(s)$, $\xi_i'(s)$は sについての有理型関数として全平面に解析接続されて、次のような関数等式をもつ；

$$(4)\quad \begin{aligned} & b(s-k)\cdot \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s)\gamma_{ij}(s) \\ & = (-1)^{(n-j)k}\, b(-s) \sum_{i=0}^{n} \xi_i'(k-s)\gamma_{ij}(k-s) \end{aligned}$$

$$(0 \leq j \leq n)$$

証明　(3)より次の式を得る

$$(5)\quad \begin{aligned} & \sum_{|T|\neq 0} a(T)|T|\ \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^t g^{-1} T g^{-1}) \\ & = \chi(g)^{k+2} \sum_{|T|\neq 0} b(T)|T|\ \widehat{|X|^{k+1} M_n f}\,(g T {}^t g) \end{aligned}$$

$$(g \in GL(n, \mathbb{R})^{+})$$

一方 $\operatorname{supp} f \subset V_j = \{ X \in V - S \ ; \ \operatorname{sgn} X = (j, n-j) \}$ ~~とすれば~~ とし、又

$$I^a(s, |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f})$$

$$= \int_{G/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{|T| \neq 0} a(T) |T| \, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}} \, (g T {}^t g) \, dg$$

とすれば（但し $\chi(g) = (\det g)^2$, $G = GL(n, \mathbb{R})^+$, $dg = (\det g)^{-n} \prod dg_{ij}$）

$$I^a(s, |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1) (-1)^{n-i} \Phi_i (\widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}, s)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1) (-1)^{n-i} \gamma_{ij}(s) \Phi_j (|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}, -s)$$

$$= b(s-k-1) \Phi_j (f, s-1) \cdot \sum_{i=0}^{n} \xi_i(s-1) \gamma_{ij}(s-1)$$

また、

$$I^b(k-s+2, |X|^{k+1} M_n f)$$

$$= \int_{G/\Gamma} \chi(g)^{k-s+2} \sum_{|T| \neq 0} b(T) |T| \, \widehat{|X|^{k+1} M_n f} \, (g T {}^t g) \, dg$$

$$= (-1)^{(n-j)k} b(-s+1) \Phi_j (f, s-1) \sum_{i=0}^{n} \xi'_i(k-s+1) \gamma_{ij}(k-s+1)$$

となる。（$I^a(s, f)$, $I^b(s, f)$ は $\operatorname{Re} s$ が大なら絶対収束して、f の distribution となる。）

ところが、

$$\int_{G/\Gamma} \chi(g)^{s} \sum_{|T|\neq 0} a(T)\,|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^{g}T{}^{t}g)\, dg$$

$$= \int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\geqq 1} + \int_{G/\Gamma,\ \chi(g)\leqq 1}$$

とすれば、前者はsについて正則で、後者は(5)により、

$$\int_{\substack{G/\Gamma \\ \chi(g)\geqq 1}} \chi(g)^{-s} \sum_{|T|\neq 0} a(T)\,|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}}\,({}^{t}g^{-1} T\, {}^{t}g^{-1})\, dg$$

$$= \int_{\substack{G/\Gamma \\ \chi(g)\geqq 1}} \chi(g)^{k-s+2} \sum_{|T|\neq 0} b(T)\,|T|\, \widehat{|X|^{k+1} M_n f}\,(g T {}^{t}g)\, dg$$

となり、これもsについて正則となり、結局

$$I^{a}(s, |X|^{k+1} M_n |X|^{-k} \check{f}) = I^{b}(k-s+2, |X|^{k+1} M_n f)$$

で、両辺ともsについて正則である。

各sについて、fを $\Phi_j(f, s-1) \neq 0$ と選ぶことが出来るから定理が成り立つ。

(3)を満たすような *distribution* の構成は、*affine* 対称空間 $Sp(n, \mathbb{R})/U(p, q)$ $(p+q=n)$ の表現論に関係しており、大島利雄氏らの協力により研究中である。

参考文献

[1] Sato, M. and Shintani, T., On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. 100 (1974), 131-170

[2] Shintani, T., On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975), 25-65

[3] Maass, H., Siegel's Modular forms and Dirichlet series, Lect. note series of Math., No. 216 Springer, (1971).