数理解析研究所講究録
第 295 巻 1977 年 38-45

正則函数 $f(x)$ の不変量 $L(f)$ と, $f^{-1}(0)$ の特異点の性質について.

京大数理研研修員　矢野　環

§0. はじめに.

$f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $\mathcal{O}$: 正則函数の芽(その層),

$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O} f_i$.

広中, Lê-Ramanujam, 加藤(満生)等により, 次の定理が知られている.

定理　f は $\mathfrak{a}$ 上 integral である。即ち, $^{\exists}a_i(x, \xi)$: $\mathcal{O}$ 係数の $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ の多項式で homogeneous i 次であり,

$$f^{\ell} + a_1(x, df) f^{\ell-1} + a_2(x, df) f^{\ell-2} + \cdots + a_{\ell}(x, df) = 0$$

ここで, (又以下でも df とはその係数 $\mathrm{grad}\, f$ と思う)。

この定理により存在の保証される, f の $\mathfrak{a}$ 上の整従属次数を $\ell(f)$ と記す.

ところで，超曲面 $f^{-1}(0)$ の性質は，f^s のみたす偏微分方程式系と密接に関係している。即ち，$\mathcal{D}$ を正則函数係数の偏微分作用素の環（層），$\mathcal{D}[s]=\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[s]$ として，

$$\mathcal{M}=\mathcal{D}[s]f^s=\mathcal{D}[s]/\mathcal{J}(s),$$

$$\mathcal{J}(s)=\{P(s)\in\mathcal{D}[s]\mid P(s)f^s=0\}.$$

が重要である。さらに，次の加群を定義する。

$$\widetilde{\mathcal{M}}=\mathcal{D}[s]/(\mathcal{J}(s)+\mathcal{D}[s](\mathfrak{m}+\mathcal{O}f)).$$

ここで，$L(f)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{J}(s)\ni^{\exists}Q(s)=s^l+\sum_{\lambda\geq1}s^{l-\lambda}Q_\lambda(x,D)\quad,\ \mathrm{ord}\,Q_\lambda\leq\lambda$$

である様な最少の l を $L(f)$ と記す。$\sigma_k(P)$ により $P\in\mathcal{D}$ の k 階の表象をあらわすことにすれば，

$$Q(s)f^s=(s)_l\Big(f^l+\sum_{\lambda\geq1}f^{l-\lambda}\sigma_\lambda(Q_\lambda)(x,df)\Big)f^{s-l}+(s\text{ につき }l-1\text{ 次以下})$$

$$(s)_l=s(s-1)\cdots(s-l+1)$$

であることより，次の不等式が成立する。

$$l(f)\leq L(f)$$

$l(f)=1$ の場合は，$L(f)=1$ でもあるが，一般には等号は成立しない。特定の f についての $L(f)$ の評価等については，[Y_1] を参照せよ。$f^{-1}(0)$ が原点を　孤立特異点とする場合は，$l(f)=1$ であれば，実は座標変換により weighted homogeneous polynomial になることが知られており（斎藤恭司），$f^{-1}(0)$ は比較的簡単な構造をもつ。よって，$l(f)\geq2$ の場合が興味ある。

§1. $L(f)$ と $f^{-1}(0)$

以下 $f^{-1}(0)$ は $0 \in \mathbb{C}^n$ を孤立特異点にもつとする。

$(f^{-1}(0), 0)$ の不変量として, local monodromy map M はよく知られている。$M = S + N$, S: semi-simple, N: nilpotent とするとき, $N^n = 0$, n: 空間次元 が知られている。
$N^e = 0$ となる初めての e は $L(f)$ と密接に関係している。但し, $L(f)$ (又 $l(f)$) は, 次元 n を一定にしておいても, いくらでも大きくなり得る f がある。

例 $f = x^{n_1} + y^{n_2} + t\,x^{m_1} y^{n_2-1}$ t: non-zero parameter.

$$\frac{n_1-1}{k+1} \leqq m_1 \leqq \frac{n_1-2}{k}, \quad \frac{1}{n_2} < \frac{m_1}{n_1}, \quad n_2 \geqq k+3.$$

f は non-quasi-homogeneous であるが (n_1, n_2, m_1) の条件から, 第3項は前2項を weight $(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$ でみたものより高次である。従って, local monodromy は $x^{n_1} + y^{n_2}$ のものと同じである。一方

$$l(f) \leqq \left[\frac{k}{2}\right] + 1, \quad L(f) \leqq k$$

が示される。($k = 1, 2, 3, 4$ までは, 上記の2式とも等号である。)

超曲面の不変量として, 重要なものに, b函数がある。それは, f が孤立特異点の場合は §0 で定義した $\tilde{\mathfrak{M}}$ における作用 s: $\overline{P(s)} \longmapsto \overline{sP(s)}$ ($\overline{}$ は $\mathcal{D}[s]$ の元の $\tilde{\mathfrak{M}}$ における class) の induce した $s: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathfrak{M}}, B_{pt}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathfrak{M}}, B_{pt})$

$B_{pt} = \mathcal{D}\,\delta(x)$ の最小多項式を $\tilde{b}(s)$ とするとき,

$$b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$$

と与えられる。$b(s)$は local monodromy よりも強い不変量である。実際，fが $f=f_0+g$，f_0: weighted homogeneous isolated sing. gはf_0の weight に関して高次のときは，Mは不変であるが，$b(s)$は変化する。今，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{pt})$における，$s$の固有値 $\{-\alpha_1, \cdots, -\alpha_\mu\}$ （ここで $\mu=\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$，$\alpha_i>0$であることがわかる。又，$\alpha_i$は重複もゆるして記っている。）として，

$$\tilde{P}(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$$

としたとき，前頁の例についていえば次の様になる。$\tilde{P}_0(t)$を $x^{n_1}+y^{n_2}$ のそれ，$\tilde{P}(t)$をfのそれとすれば，

$$\tilde{P}_0(t) = \frac{(t^{1/n_1}-t)(t^{1/n_2}-t)}{(1-t^{1/n_1})(1-t^{1/n_2})}$$

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0(t) + (1-t)t^{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sum_{j=2}^{k} t^{j(\frac{m_1}{n_1}-\frac{1}{n_2})}\frac{t-t^{1-j\frac{m_1}{n_1}}}{1-t^{\frac{1}{n_1}}}$$

である。ここで，$\tilde{P}(t)$に二項にkがあらわれていることに注意せよ。（$k=1$の時は，Σは空な和である。$k=2,3$についてはよ式は証明されており，$k\geq 4$では予想である。）

$L(f)=2$ の場合は，$\tilde{\mathcal{M}}$の完全な構造，$b(s)$の決定法等すべて [Y₁] [Y₂] 等に表わされている。よって，$L(f)=3$の場合が，次の§であつかわれる。

§ $L(f)=3$.

我々は2つの場合を区別する.

$$\ell(f)=2\,,\quad L(f)=3.$$

$$\ell(f)=L(f)=3.$$

第一の場合, ${}^{\exists}P(s)=s^2+sA+B\in\mathcal{J}(s)$,

$$P(s)f^s=a(x)sf^{s-1}$$

$$a(x)\notin\mathfrak{a}+\mathcal{O}f$$

となっていることがわかる。我々はこの場合を $(2,3;a)$ と表記する。一般の場合にもどり,

$(b_i(x))$ を ideal $(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}f):f^2$ の basis とせよ.

$${}^{\exists}B_j(s)=b_j s^2+b_j^{(1)}s+b_j^{(2)}\,,\qquad \operatorname{ord} b_j^{(k)}\leq k$$

$$B_j(s)f^s=b_j^{(3)}(x)\,sf^{s-1},$$

となる $B_j(s)$ が構成される。ここで $b_j^{(3)}\notin\mathfrak{a}+\mathcal{O}f$, $j=1,\cdots,J$

$b_j^{(3)}=0\quad j=J+1,\cdots J+J'$ と仮定してよい. このとき,

$$b_j sf^{s+1}\equiv b_j^{(3)}f^s\qquad \bmod\ \mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathcal{O}f)f^s$$

であることがわかる。さて, さらに $\mathfrak{a}+\mathcal{O}f:b_j^{(3)}=\sum_k\mathcal{O}b_{j,k}^{(4)}$,

$b_{j,k}=b_{j,k}^{(4)}\cdot b_j\quad (j\leq J)$, $\quad b_{j,k}=b_j\quad (j>J)$ とおく. 我々は

$$B_{j,k}(s)=b_{j,k}s^2+b_{j,k}^{(1)}s+b_{j,k}^{(2)}\quad\in\mathcal{J}(s)$$

を構成することができる。一般には, さらに,

$$C_\ell(s)=c_\ell(x,D)s^2+c_\ell^{(1)}(x,D)s+c_\ell^{(2)}(x,D)\,,$$

$$\operatorname{ord} c_\ell\geq 1\,,\quad \operatorname{ord}(c_\ell)+2=\operatorname{ord}(c^{(2)})\geq\operatorname{ord}c_\ell^{(1)}+1$$

という形の $g(s)$ の元が，$g(s)$ の生成元として必要である。

(2,3;a) の場合，$b_{1,k}$，$b^{(1)}_{1,k}$，$b^{(2)}_{1,k}$，$B^{e}_{1,k}$ の代りに，b_k，$b^{(1)}_k$，$b^{(2)}_k$，B_k と記すことにしよう。

次の定理は，$L(f)=3$ の場合の $\widetilde{\mathfrak{m}}$ の完全な構造を与えよ

定理. $L(f)=3$ の時，$\widetilde{\mathfrak{m}}$ は下記の表示をもつ.

1) case (3,3) i.e. $\ell(f)=L(f)=3$.

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{m}} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathscr{D}^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} f_i & & \\ f & & \\ b^{(3)}_j & & \\ & f & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_{j,k} & b^{(1)}_{j,k} & b_{j,k} \\ c^{(2)}_\ell & c^{(1)}_\ell & c_\ell \end{bmatrix}} \mathscr{D}^N$$

2) case (2,3;a)

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{m}} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathscr{D}^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} f_i & & \\ f & & \\ g & h & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_k & b^{(1)}_k & b_k \end{bmatrix}} \mathscr{D}^{n+2+r+q}$$

ここで，(g, h) は $(0, f)$ としても，$(a, 0)$ としてもよい。
さらに，

$$(\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a \supset \mathfrak{a}:f \supset \mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a$$

が成立している。

a_ν' a_ν とは，$\sum \mathcal{O}a_\nu(x) = \mathfrak{a}:f$ であり，

$$(a_\nu(x)s + a_\nu'(x,D))f^s = 0$$

となっているものである。

この構造定理より，特に $(2,3;a)$ の場合に，次の定理が導びかれる。

定理　$F = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, B_{pt})$ とする。Fの μ 次元の basis を，次の様にとることができる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\mu_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1' \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\mu_2} \\ v_{\mu_2}' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} u_{\mu_1} \\ v_{\mu_1} \\ w_{\mu_1} \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで $(u_1, \cdots, u_{\mu_i})$ は F_i の basis であり，

$$F_1 = \{u \in B_{pt} \mid (\mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a)u = 0\}$$

$$F_2 = \{u \in B_{pt} \mid (\mathfrak{a}:f)u = 0\}$$

$$F_3 = \{u \in B_{pt} \mid ((\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a)u = 0\}.$$

又，(v, v', w) は次の方程式から決定される。

$$
\begin{cases}
b_k v_i' + b_k^{(1)} u_i = 0, \\
a_\nu v_i + a_\nu' u_i = 0, \\
b_k w_i + b_k^{(1)} v_i + b_k^{(2)} u_i = 0.
\end{cases}
$$

定理　$\exists P(s, x, D) \in \mathcal{D}[s]$ s.t.

$$P(s, x, D) f^{s+1} = b(s) f^s,$$

$P(s,x,D) = \sum s^k P_k(x,D)$ としたとき, $\max\limits_k (\mathrm{ord}\, P_k + k) = \deg b(s)$.

上記第1の系は，$\ell(f)=1,2$ の場合の自然な拡張であるが，$a(x)$ が重要な役割をはたすことが著しい。第2の系は $\ell(f)=1, 2$ の時と同じ性質をもつ $P(s)$ の存在を保証している。

証明にあたっては，先の定理の $(g, h) = (0, f), (a, 0)$ がつかいわけられる。

$(2, 3; a)$ の実例と，その構造については [Y_1][Y_2] に詳しい。

[Y_1] T. Yano On the theory of b-functions. : to appear in Publ. of RIMS.

[Y_2] 〃 2 ; in prep.

[Y_3] 〃 3 ; 〃.