数理解析研究所講究録
第295巻 1977年 60-68

ある種の多重特性的双曲型作用素の基本解の超局所構造について。

京大 数理研 河合隆裕
城西大 理・数 中村 玄

中村[1]及び浜田－中村[1]による複素領域での初期値問題の解析を用いて，表題の問題について満足すべき結果が得られた。(河合－中村[1]) 一言でいえば，特性多様体の特異点が包含的であれば，microfunction の解の台は bicharacteristic net(*) に沿って伝播するというものである。この事実だけならば，柏原－河合[1]を用いても導き得るが，浜田－中村[1]が極めて具体的な解析を行っており，それに基いての我々の解析は，“多重特性作用素の解析”において，一つの出発点を与え得るものと思う。

我々の結果について述べる前に，問題の背景並びに将来への展望について述べておきたい。

1°. 背景： S-K-K により，単一特性的作用素についての超局所解析は，それ以上を望み得ない程完璧になされた。し

(*) この用語は佐藤先生の御示唆による。

かしながら，“擬微分方程式系に対するCauchy-Kowalevskyの定理を作ろう”という当初の目的からみると，余りに限定されたクラスのみを対象としていると言わざるを得ない。もちろん究極的には，接触構造さらには$\mathcal{E}^{f}$の構造をとりこむ“desingularizationの理論”を目指すべきであろうが，幾何学的には正規交叉である様な多様体の場合すらまともに扱えない現状では，まず特性多様体が正規交叉の場合に詳しく研究を進めるべきと考える。柏原－河合－大島[1]はこの方向で画期的な物ではあるが，そこで扱われた微分作用素は，“holonomic systemによる微分方程式論の統制”という“佐藤の指導原理”からみると今の所鬼子である。（但し，柏原－河合[1]定理3.3の証明の様に，より広い作用素のクラスを用いれば，鬼子ではないのかも知れない。）これに対し，中村[1]で扱われている微分作用素については，この指導原理が成立することが，中村[1]の解析によりる解される こうした観点から，次の様な問題が自然と浮んでくる。

2°. 展望と今後の課題

(a). 擬微分作用素を対象として，問題設定をより徹底的に超局所化する事。これに成功すれば，中村[1]及び中村－浜田[1]において用いられた$\{\zeta_1-\lambda^{+}(z,\zeta'),\ \zeta_1-\lambda^{-}(z,\zeta')\}=0$という条件は，$\{\zeta_1=\lambda^{+}(z,\zeta')=\lambda^{-}(z,\zeta')\}$上で$\{\zeta_1-\lambda^{+}(z,\zeta'),\ \zeta_1-\lambda^{-}(z,\zeta')\}=0$

というより自然な条件におきかえられる。

(b). 浜田－中村[1]の結果を$\mathcal{E}$－加群の構造から見直す事。その際，無限階の作用素が重要な役割を果すものと思われる。特に，特性多様体の一般点での重複度が1より大の場合も考察したい。これらがうまく行けば，浜田－中村[1]で扱われた場合は，"佐藤の統制原理"の観点から好ましい場合であるといえよう。更に，過剰決定系の場合に理論を進める事が可能となろう。

仮定と結果

ここで考える線形微分作用素 $P(x,D_x)=P(x_1,\cdots,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$ は，次の仮定(1)，(2)をみたすものとする。

(1). $0\in\mathbb{C}^n$ の複素近傍 ω が存在して，$P(x,D_x)$ は ω で正則な微分作用素 $P(z,D_z)=P(z_1,\cdots,z_n,\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n})$ の $\omega\cap R^n$ への制限になっている。

(2). $P(z,D_z)$ の主シンボルを $p_m(z,\zeta)=p_m(z_1,\cdots,z_n,\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ とするとき，$\{z=0\}\times S^{n-2}$ の複素近傍 Ω で正則な関数 $\lambda^\pm(z,\zeta')$，$\lambda_\ell(z,\zeta')$ $(3\leq\ell\leq m)$ が存在して，次がなりたつ。

(2.a). Ω で $p_m(z,\zeta)=(\zeta_1-\lambda^+(z,\zeta'))(\zeta_1-\lambda^-(z,\zeta'))\prod_{\ell=3}^{m}(\zeta_1-\lambda_\ell(z,\zeta'))$ と因数分解される。

(2.b). 各 $\xi'\in S^{n-2}$ に対して，$\lambda^+(0,\xi')$，$\lambda_\ell(0,\xi')$ $(3\leq\ell\leq m)$ は

互いに相異なる。

(2.C) Ω で Poisson bracket $\{\zeta_1-\lambda^+(z,\zeta'),\ \zeta_1-\lambda^-(z,\zeta')\}=0$。

但し，$\zeta'=(\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，$\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$ とした。（以下 " ' " 記号の用法はこれにならうものとする。）

bicharacteristic net を次の様に定義する。

<u>定義</u>　点 (z^0,ζ^0) を通る $\zeta_1-\lambda^+(z,\zeta')$ の bicharacteristic を $b_{+,(z^0,\zeta^0)}$，点 (z',ζ') を通る $\zeta_1-\lambda^-(z,\zeta')$ の bicharacteristic を $b_{-,(z',\zeta')}$ とするとき，$\bigcup_{(z',\zeta')\in b_{+,(z^0,\zeta^0)}} b_{-,(z',\zeta')}$ を，(z^0,ζ^0) を通る P の bicharacteristic net と呼ぶ。特に，実領域で $b_{+,(z^0,\zeta^0)}$，$b_{-,(z',\zeta')}$ を記述するパラメーターを同符号にとれるならば，この bicharacteristic net は time like であるという。なお bicharacteristic net が退化する場合，つまり通常の bicharacteristic も bicharacteristic net と呼んだりする。

<u>注意</u>　$(z^0,\zeta^0)\in\{\zeta_1=\lambda^+(z,\zeta')=\lambda^-(z,\zeta')\}$ のときは，上の定義で b_+ と b_- の役割を交換できる。

次の定理がなりたつ。

<u>定理</u>　$P(x,D_x)$ は仮定 (1)，(2) をみたし，$\xi=(1,0,\cdots,0)$ 方向に hyperbolic であるとする。このとき，

$$(CP)_j \begin{cases} P(x, D_x)\, E_j(x, y') = 0 , \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^k E_j(x, y')\Big|_{x_1=0} = \delta_{jk}\, \delta(x'-y') \quad (0 \le k \le m-1) \end{cases}$$

の超関数(hyperfunction)解 $E_j(x, y')$ が $(x, y') = (0, 0)$ の近傍で唯1つ存在する。そして $SS\,E_j(x, y')$ の構造については，次の implication がなりたつ。即ち

$(x^0, y'^0 ; u^0, v'^0) \in SS\,E_j(x, y') \Longrightarrow (x^0, y'^0 ; u^0, v'^0)$ は $(0, y'^0, y'^0 ;$ $\lambda^{\pm}(0, y'^0, -v'^0), -v'^0, v'^0)$，$(0, y'^0, y'^0 ; \lambda_\ell(0, y'^0, -v'^0), -v'^0, -v'^0, v'^0)$ $(3 \le \ell \le m)$ のどれかを通る time like bicharacteristic net に属する。

定理の証明の概略

他の場合も同様なので，$j = m-1$ の場合について述べる。証明の方針は，$(CP)_{m-1}$ の超関数解 $E(x, y')$ を複素領域における適当な正則関数の境界値として求める事である。

まず良く知られた次の公式を思い出す。

$$\delta(x'-y') = \int \frac{(n-2)!\; \omega(\xi')}{(-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}(\langle x'-y', \xi'\rangle + i0)^{n-1}}$$

ここで $\omega(\xi')$ は，$n-2$ 次元球面 S^{n-2} の体積要素である。この事に注意すると，$E(x, y')$ は

$$(1) \begin{cases} P(x, D_x)\, E(x, y', \xi') = 0 , \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^k E(x, y', \xi')\Big|_{x_1=0} = (n-2)!\, \delta_{k,m-1} \Big/ (-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}(\langle x'-y', \xi'\rangle + i0)^{n-1} \\ \qquad (0 \le k \le m-1) \end{cases}$$

の解 $e(x,y',\xi')$ を ξ' について積分して得られるに違いない。

複素領域で (イ) に対応する Cauchy 問題は,

$$\begin{cases} P(z, D_z)\,E(z, w', \zeta') = 0, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right)^k E(z, w', \zeta')\Big|_{z_1=0} = (n-2)!\,\delta_{k,m-1} \big/ (-2\pi\sqrt{-1})^{n-1}(\langle z'-w', \zeta'\rangle + i0)^{n-1} \\ \qquad\qquad (0 \leq k \leq m-1) \end{cases}$$

となるが, この問題の解 E は, 仮定 (1), (2) の下で浜田ー中村 [1] により, 次式で与えられる。

(ロ) $$E(z,w',\zeta') = \sum_{l=3}^{m}\left\{\frac{F_l(z,w',\zeta')}{[\varphi_l(z,w',\zeta')]^{h_l}} + G_l(z,w',\zeta')\log\varphi_l(z,w',\zeta')\right\} +$$

$$+ \frac{F^+(z,w',\zeta')}{[\varphi^+(z,w',\zeta')]^{h^+}} + G^+(z,w',\zeta')\log\varphi^+(z,w',\zeta') + \int_0^{z_1}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\tilde{F}_p(z,w',\zeta',\tau)}{[\Phi(z,w',\zeta',\tau)]^p} +\right.$$

$$\left. + G(z,w',\zeta',\tau)\log\Phi(z,w',\zeta',\tau)\right\}d\tau + H(z,w',\zeta'),$$

ここで h_l $(3 \leq l \leq m)$, h^+ は非負整数, F_l, G_l, F^+, G^+, $\tilde{F}_p$, G, H は $\{(z,w',\tau)=0\} \times S^{n-2}$ の複素近傍で正則な関数。更に, $\varphi^\pm(z,w',\zeta')$, $\varphi_l(z,w',\zeta')$ $(3 \leq l \leq m)$, $\Phi(z,w',\zeta',\tau)$ は,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_1}\varphi^\pm = \lambda^\pm(z, \mathrm{grad}_{z'}\varphi^\pm), \quad \dfrac{\partial}{\partial z_1}\varphi_l = \lambda_l(z, \mathrm{grad}_{z'}\varphi_l), \quad \dfrac{\partial}{\partial z_1}\Phi = \lambda^-(z, \mathrm{grad}_{z'}\Phi), \\ \varphi^\pm(0,z',w',\zeta') = \varphi_l(0,z',w',\zeta') = \langle z'-w', \zeta'\rangle, \quad \Phi(\tau,z',w',\zeta',\tau) = \varphi^+(\tau,z',w',\zeta') \end{cases}$$

で定義される phase function である。

超関数解 $e(x,y',\xi')$ を $E(z,w',\zeta')$ の境界値として求める際に一番問題となるのは, (ロ) の積分項 $\tilde{f}_0(z,w',\zeta') = \int_0^{z_1} F(z,w',\zeta',\tau)\,d\tau$

（但し，$F(z,w',\zeta',\tau)$ は（ロ）における積分項の被積分関数。）の処理である。特に $\tilde{f}_0$ の一価正則領域が問題となる。（これは又浜田－中村[1]でわざとあいまいにした初期条件の意味を明確にすることでもある。）

$\tilde{f}_0$ を除く（ロ）の各項の解析は，河合[1]と同様であるので，以下 $\tilde{f}_0(z,w',\zeta')$ を中心にして調べる。

明らかに $F(z,w',\zeta',\tau)$ は領域 $\{\mathrm{Im}\,\Phi(z,w',\zeta',\tau)>0\}$ で一価正則である。いまFのそこでの branch を定め，$F(z,w',\zeta',\tau)$ が定める hyperfunction を $f(x,y',\xi',\tau)$ とする。$\int Y(\tau)Y(x_1-\tau)f(x,y',\xi',\tau)\,d\tau$（但し，Y は Heaviside 関数。）の $x_1=0$ への制限は保証されないので，これの代りに $e_0(x,y',\xi')-e_1(x,y',\xi')\equiv\int Y(\tau-a)Y(x_1-\tau)\times f(x,y',\xi',\tau)\,d\tau-\int Y(\tau-a)Y(-\tau)f(x,y',\xi',\tau)\,d\tau$ を考え，これが $\tilde{f}_0(z,w',\zeta')$ の定める hyperfunction であると予想してみる。この予想が示されれば，（イ）の超関数解 $e(x,y',\xi')$，従って又基本解 $E(x,y')$ は求ったも同然である。なお a は，次の様にとるものとする。まず Holmgren's uniqueness thm. により，問題を次の（＊）がなりたつ様な $(0,0,\xi'^0)$ の近傍Mに局所化する。

（＊）$\langle \mathrm{grad}_{(x',y',\xi')}\Phi(x_1,x',y',\xi',\tau),\theta\rangle>0$ $\quad((x,y',\xi',\tau)\in(M\times R^1)\cap\{-\delta\leq\tau\leq x_1\leq\delta\})$

for some $\theta\in R^{3(n-1)}$ and $\delta>0$

そのとき，a は $-\delta\leq a<0$ をみたす任意の数とする。この様な近傍Mを考えれば，$\int_a^{z_1}F(z,w',\zeta',\tau)\,d\tau$，$\int_a^0F(z,w',\zeta',\tau)\,d\tau$ の境界

値が夫々 $e_0(x,y',\xi')$, $e_1(x,y',\xi')$ となる事は容易に分る。従って上の予想が正しい事が分った。

次に $SSE(x,y')$ を調べなければならないが，簡為の為ここでは $SSE(x,y')$ を構成している所の $SS(\int e_0(x,y',\xi')\omega(\xi'))$ についてだけ調べる事にする。以下 $x_1 \geq 0$ で考察する。$\int e_0(x,y',\xi')\omega(\xi')$ の特異スペクトルを丹念に調べると，

$$SS\left(\int e_0(x,y',\xi')\omega(\xi')\right) \subset C_1 \cup \Big(\bigcap_{\substack{a<0\\|a|\ll 1}} C_2(a)\Big) \cup \Big(\bigcap_{\substack{a<0\\|a|\ll 1}} C_3(a)\Big) \equiv C\text{。}$$

ここで，$C_1, C_2(a), C_3(a)$ は $\Gamma \equiv \bigcup_{r>0} rS^{n-2}$ とするとき，

$$C_1 = \{(x,y';u,v')\,;\ {}^\exists\tau\in\mathbb{R}\,(\tau\sim 0),\ {}^\exists b\in\mathbb{R},\ {}^\exists\xi'\in\Gamma \text{ such that } \Phi(x,y',\xi',\tau)=0,$$
$$x_1=\tau,\ (u,v') = \operatorname{grad}_{(x,y')}\Phi(x,y',\xi',\tau)\Big|_{x_1=\tau} + b(1,0,0),\ \operatorname{grad}_{\xi'}\Phi(x,y',\xi',\tau)$$
$$=0\},$$

$$C_2(a) = \{(x,y';u,v')\,;\ {}^\exists\xi'\in\Gamma \text{ such that } (u,v') = \operatorname{grad}_{(x,y')}\Phi(x,y',\xi',a),$$
$$\operatorname{grad}_{\xi'}\Phi(x,y',\xi',a)=0\},$$

$$C_3(a) = \{(x,y';u,v')\,;\ a\leq {}^\exists\tau\leq x_1,\ {}^\exists\xi'\in\Gamma \text{ such that } (u,v') =$$
$$\operatorname{grad}_{(x,y')}\Phi(x,y',\xi',\tau),\ \operatorname{grad}_{(\xi',\tau)}\Phi(x,y',\xi',\tau)=0\}$$

により定める。

$\bigcap_{\substack{a<0\\|a|\ll 1}}$ をとるところが少々面倒であるが，Φ の構成法から C は，

$C \subset \bigcup_{\substack{y'^0 \sim 0 \\ \xi'^0 \in \Gamma}} \{(0, y'^0, y'^0; \lambda^{\pm}(0, y'^0, \xi'^0), \xi'^0, -\xi'^0)$ を通る time like bicharacteristic net$\} \cap \{x_1 \geq 0\}$

と bicharacteristic net で記述する事が出来る。

甚だ不完全だが以上で定理の証明の概略的説明を終える。

文献

浜田－中村［1］： On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with non uniform multiple characteristic. To appear.

柏原－河合［1］： J. Math. Soc. Japan, 27, 359－404 (1975)

柏原－河合－大島［1］： Proc. Japan Acad., 50, 420－425 (1974)

河合－中村［1］： Micro-local properties of local elementary solutions for Cauchy problems for a class of hyperbolic linear differential operators. To appear.

中村［1］： The singularities of the solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non-uniform multiple. Publ. RIMS. Kyoto Univ., 12 (in printing)