

包含系の特性多様体を持つための条件 及び特異な場合の Frobenius の定理について

東大・理 真島 秀行

ここに著者の得た二つの結果を記す。二つの事柄は無関係ではないが、独立な話題として扱う。

I. 包含系の特性多様体を持つための条件

偏微分方程式の解法を常微分方程式の解法に帰着するという考えは昔からある。しかし全てがそのようになるとは思われない。それではその限界はどこにあるのだろうか。すなわち次の問題を考える：

問題. 偏微分方程式の初期値問題を常微分方程式の問題に帰着出来る限界はどこか。

この問題は病的かもしれないが明確に解答し得るならば無意味ではないであろう。 l, m, n を方程式の階数、未知関数の個数、独立変数の個数としておく。

上記の問題を考えるとき、まず偏微分方程式としてどのようなものを対象とするのが決めなくてはならない。解を持つ偏

微分方程式系は Cartan-Kuranishi-Matsuda の延長定理により
 或る正則条件の下で包含系に延長される。従って、対象を包
 合系としてよいだろう。包含系とは、正則条件、解析的条
 件、及び代数的条件で規定される。そして至には n 個の指数
 と云われる整数 $\lambda_1(\mathbb{Q}) \geq \lambda_2(\mathbb{Q}) \geq \dots \geq \lambda_m(\mathbb{Q}) \geq 0$ が導入されてい
 る。 $l=1, m=1$ の場合には Lagrange bracket について閉じて
 いる系と同じであり、 $l=1, \lambda_1(\mathbb{Q})=0$ の場合には完全積分可
 能な一次外微分方程式系と同一視出来る。

さて、次に「常微分方程式の問題に帰着する」と云うこと
 をどう把握するのか。 $l=1, m=1$ のときには Lagrange, Cauchy
 Jacobi, Lie らによつて上記の問は肯定的に解がれている。
 すなわち、 $\mathbb{Q} = \{F_1, \dots, F_r\}$ に対して $(n-r)$ 次元の初期多様体が
 与えられたならば、次々に

$$\frac{dx_1}{F_{i,p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{i,p_n}} = \frac{dy}{F_{i,y} + \sum_j p_j F_{i,x_j}} = \frac{-dp_1}{F_{x_1}} = \dots = \frac{-dp_m}{F_{x_m}} \quad (i=1, \dots, r)$$

なる系を解いて解多様体を構成出来る。しかしながら、この
 解法の本質を指摘したのは E. Cartan である。彼は一般に外
 微分方程式系 Σ に対して特性系、特性多様体を定義し、特性
 系が完全積分可能であることを示した。また特性多様体を持
 つための十分条件を与えた： $\tilde{\lambda}_1(\Sigma) = 1$ 。一階偏微分方程式系
 至を外微分方程式系 $\Sigma(\mathbb{Q}) = \{d\mathbb{Q}, \text{contact form}\}$ とみだてて解

くと云う Lie の立場をとるとき、古来の特性系は E. Cartan の特性系に一致し、彼の十分条件が特性多様体を持つことを保証している ($\Delta_i(\mathbb{I}(\mathbb{I})) = \Delta_i(\mathbb{I})$ であることが示されて初めてそう云えるのだが)。また、一方、 $m=1, n=2$ に対しては、Darboux の方法というのがあった。それは与えられた方程式系、初期値に応じて新しい方程式系を構成し、特性多様体を持つ系に帰着するという方法であった。この解法が包含系を新しい包含系に拡張する理論と E. Cartan の特性系の理論とからなっていることを指摘したのは垣江氏である。彼はさらに、 l, m, n が一般の場合に次の問題を考えている。

1. 与えられた包含系 \mathbb{I} に対し、その解がまた \mathbb{I} のそれになる新しい包含系を構成すること
2. E. Cartan の特性多様体の理論が適用され得る包含系を見出すこと。

こういう次第で、我々は「常微分方程式に帰着する」ということをこの二つの問題としてとらえることにする。この問題のうち 1. を垣江氏は専ら扱っていて、2. は原理的に Cartan によって解がれているので、それではよしとされた。(cf. Kakie [2])

ところが著者は例を計算するうちに十分広い特性多様体を持つための条件を見出した。しかもそれは指数だけの条件としては最良であるもわがた。結果は次の通りである。

定理. \mathfrak{K} を包含系とする. $\sum_{i=1}^n \delta_i(\mathfrak{K}) < n$ ならば, 特性系の余次元は少なくとも $(n - \sum_{i=1}^n \delta_i(\mathfrak{K}))$ である. 従って特性系が特異でないところでは, これを解いて少なくとも $(n - \sum_{i=1}^n \delta_i(\mathfrak{K}))$ 次元の特性多様体を得られる.

定理. t_1, \dots, t_n を整数で, $m \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0$ かつ $\sum t_i \geq n$ を満たすものとする. このとき $\delta_i(\mathfrak{K}) = t_i$ となる一階包含系 \mathfrak{K} で特性系の余次元が 0 となるものがある. この状況は generic である.

こうして冒頭の問題に対して一つの解答を与えることが出来る: $\sum_{i=1}^n \delta_i(\mathfrak{K}) < n$ が限界である.

同階数の拡張をすると $\sum_{i=1}^n \delta_i(\mathfrak{K})$ は減る. 従って何回かの拡張の後には $\sum_{i=1}^n \delta_i < n$ になる.

尚, $m=1$ のときには Beardon によって上の結果が得られていた.

II. 特異な場合の Frobenius の定理について

原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍で定義された正則な一次外微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$ を考える. 完全積分可能条件 $d\omega \wedge \omega = 0$ を仮定する. このとき或る i に対して $A_i(0) \neq 0$ ならば ω は積分を持つ. すなわち, 二つの原点の近傍で正則な函数 g, f があって, $\omega = g df$ ($g(0) \neq 0$) と書ける.

それでは全ての i に対して $A_i(0) = 0$ の場合はどうであろうか。著者の得た結果は次の通りである。

定理. $\text{rank} \frac{\partial(A_1, \dots, A_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_0 = r \geq 3$ ならば, ω は積分を持つ。
 $r=2$ で形式的に積分を持つならば本当に積分を持つ。

実は B. Malgrange によつてより一般的な定理が証明されてしまっている。

定理. $I = \{x; A_1(x) = \dots = A_n(x) = 0\}$ とする。 $\text{codim } I \geq 3$ ならば ω は積分を持つ。 $\text{codim } I = 2$ で形式的に積分を持つならば本当に持つ。

著者の証明は、変数変換してゆき一つ変数の数を下げて正則な場合の Frobenius の定理に帰着する、というやり方である。以下に概略を記そう。

まず次のことに注意する。

補題 1. 上の仮定の下で ω の一次成分の行列は対称である。すなわち、 $\omega = \int (\sum_j a_{ij} x_j + [2\text{次以上}]) dx_i$ と書くとき行列 (a_{ij}) は対称行列となる。

よつて $\omega = \sum_1^r (x_i + [2\text{次以上}]) dx_i + \sum_{r+1}^n [2\text{次以上}] dx_j$ と仮定してよい。

補題 2. $\theta = \sum_1^N (y_i^m + [\text{higher order}]) dy_i$, $d\theta \wedge \theta = 0$ は形式的に積分を持つ。 m は正の整数, $N \geq 3$ とする。なお次のようにパラメーターが入つていてもよい。すなわち、

$\theta = \sum_1^m (y_i^m + B_i(y, z)) dy_i$, $d_y \theta \wedge \theta = 0$ ならば, $\theta = \hat{g}(y, z) dy \hat{f}(y, z)$, ここで dy は変数 $y = (y_1, \dots, y_m)$ に関する外微分, \hat{g}, \hat{f} は形式巾級数である。

補題3. $\theta = x_1^m dx_1 + x_2^m dx_2 + \sum_3^n B(x) dx_j$, $d\theta \wedge \theta = 0$ とするとき, B は $(x_1^{m+1} + x_2^{m+1}, x_3, \dots, x_n)$ の函数となっている。

それでは, ω を変換していこう。まず

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = (\xi_1 + E_1(\xi_1, \eta_1, x_3, \dots, x_n)) d\xi_1 + (\eta_1 + H_1(\xi_1, \eta_1, x_3, \dots, x_n)) d\eta_1 + \sum_3^n \Gamma_1^i(\xi_1, \eta_1, x_3, \dots, x_n) dx_i \\ E_1(0, 0, x_3, \dots, x_n) = H_1(0, 0, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

と出来る。続いて $d\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ または形式的積分の存在に注意すると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = (\xi_2 + E_2(\xi_2, \eta_2, x_3, \dots, x_n)) d\xi_2 + (\eta_2 + H_2(\xi_2, \eta_2, x_3, \dots, x_n)) d\eta_2 + \sum_3^n \Gamma_2^i(\xi_2, \eta_2, x_3, \dots, x_n) dx_i \\ (0, 0, x_3, \dots, x_n) \text{ において } E_2, H_2, \frac{\partial E_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial E_2}{\partial \eta_2}, \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial H_2}{\partial \eta_2} \text{ が } 0. \end{array} \right.$$

に変換出来る。さらに $\xi_2 = \frac{\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}}$, $\eta_2 = \frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{2}i}$ により

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3 = (\xi_3 + E_3) d\eta_3 + (\eta_3 + H_3) d\xi_3 + \sum_3^n \Gamma_3^i dx_i \\ E_3, H_3 \text{ については上と同じ性質を持つ。} \end{array} \right.$$

になる。次に原点で直交する二つの複素積分曲線の存在から

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_4 = k_4 (\xi_4 d\eta_4 + \eta_4 (1 + H_4) d\xi_4 + \sum_3^n \Gamma_4^i dx_i) \\ k_4(0) = 1 \end{array} \right.$$

と変換出来る。ここで $\xi_4 d\eta_4 + \eta_4 (1 + H_4) d\xi_4$ に注目すると、これはパラメータ η_4 を持つ Briot-Bouquet 型の方程式で、 η_4 の係数が 1 である。また補題 2 (または仮定) より、形式的

積分を持つ。これから

$$\omega_5 = K_5 (\xi_5 d\eta_5 + \eta_5 d\xi_5 + \sum_3^n \Gamma_5^i d\lambda_i)$$

$$(K_5(0) = 1)$$

の形に変換し得ることがわかる。再び変数を取り換えて、

$$\omega_6 = K_6 (\xi_6 d\eta_6 + \eta_6 d\xi_6 + \sum_3^n \Gamma_6^i d\lambda_i)$$

$$(K_6(0) = 1)$$

とし、 Γ_6^i を見れば補題3により $(\rho, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ の函数であることがわかる。 $\rho = \frac{1}{2}(\xi_6^2 + \eta_6^2)$ とした。そこで、

$$\omega_6 / K_6 = d\rho + \sum_3^n \Gamma_6^i(\rho, \lambda_3, \dots, \lambda_n) d\lambda_i = \theta$$

を考えると $d\omega_6 \wedge \omega_6 = 0$ より θ が $(\rho, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ について完全積分可能である。よって Frobenius の定理により θ は積分を持つ。変数を元に戻して ω の積分の存在がわかる。

<参考文献>

I. について

E. Cartan [1], Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, Ann. sci. Ecole Norm. Sup. 18, 1901.

[2] Leçon sur les invariants intégraux, Hermann Paris 1922.

M. Kuramishi, Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967.

松田道彦、外微分形式の理論、岩波、東京、1976.

K. Kakei [1] On involutive systems of partial differential equations in two independent variables, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, sec. III. 21. 1974. [2] 二次以上の characters を消える包含的偏微分方程式系について、数理研講究録 226.

J. Beardon, Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres, Ann. Ecole Norm. 13. 1896, supplément
 大島・小松 一階偏微分方程式、岩波講座、基礎数学. 1977
 真島 包含系の特性多様体を持つための条件、東大修士論文、1977.

II. について.

B. Malgrange [1] Frobenius avec singularités, co-dimension un, Publ. Sc. J. H. E. S. 46. 1976. [2] Frobenius avec singularités 2. le cas général (à paraître)

B. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour germe de forme de Pfaff. Ann. Inst. Fourier. 26. 2. 1976.

M. Hukuhara - I. Kimura - I. Matsuda, Équations différentielles ordinaires de premier ordre dans le champ complexe, Pac. Math. Sc. Japan. 7. 1961

真島 原点の特異な解析的完全積分可能一次外微分方程式の積分の存在について、東大修士論文、1977.