数理解析研究所講究録
第295巻 1977年 77-87

Studies on Holonomic Quantum Fields

京大数理研　佐藤幹夫
三輪哲二
神保道夫

0. Introduction

二次元Ising模型のスケール極限として得られる場の理論は，厳密に解くことができる。理論の構成及び背景については[1]と[2]の解説を見ていただきたい。一方、Ising模型の二点相関函数を初めて求めたWu達は，スケール極限においてそれが第III種Painlevé函数で閉じた形に書き表わし得るという驚くべき事実を発見した。([4]) 以下において、我々はこの仕事を拡張し、ある種のholonomic systemの変形(deformation)から得られる全微分方程式系の解を用いて一般のn点函数を表わし、それらの間に成立つ代数的関係式を併せて導く。

1. Dirac方程式の二価の解

二次元Euclid空間$\mathbb{R}^2$の座標を$(z,\bar{z})$ ($\mathbb{R}^2 \ni (x^1, x^2)$,

$z=\frac{1}{2}(ix^0+x^1)$) で表わし，$\partial_z=\frac{\partial}{\partial z}$, $\partial_{\bar z}=\frac{\partial}{\partial \bar z}$ とおく。二次元における Euclid 的 Dirac 方程式

(1) $\quad (m-\Gamma)w=0$, $\Gamma=\begin{pmatrix} & \partial_z \\ \partial_{\bar z} & \end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}$

を考えよう。ここに $m>0$ は定数（粒子の質量）。今 $l\in\mathbb{C}$ に対して

(2)
$$w_l(z,\bar z)=\begin{pmatrix} v_{l-\frac{1}{2}}(z,\bar z) \\ v_{l+\frac{1}{2}}(z,\bar z)\end{pmatrix},\quad w_l^*(z,\bar z)=\begin{pmatrix} v^*_{l+\frac{1}{2}}(z,\bar z) \\ v^*_{l-\frac{1}{2}}(z,\bar z)\end{pmatrix}$$

$$v_l,\ v_l^*=e^{\pm il\theta}I_l(mr),\quad z,\bar z=\frac{1}{2}re^{\pm i\theta}$$

とおく（I_l は変形 Bessel 函数）。これらは (1) の多価の解であり，運動群の生成演算子 ∂_z, $\partial_{\bar z}$, $M_F\underset{\mathrm{def.}}{=}z\partial_z-\bar z\partial_{\bar z}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$ に対して次のように振舞う：

$$\partial_z w_l=m\cdot w_{l-1},\quad \partial_z w_l^*=m\cdot w_{l+1}^*,\quad \partial_{\bar z}w_l=m\cdot w_{l+1},\quad \partial_{\bar z}w_l^*=m\cdot w_{l-1}^*,$$
$$M_F w_l=l\,w_l,\quad M_F w_l^*=-l\cdot w_l^*$$

更に，点 $(a,\bar a)$ における (1) の局所解 w が，$|w|=O(|z-a|^{-N-\frac{1}{2}})$ （$|z-a|\to 0$），$w(a+e^{2\pi i}(z-a),\bar a+e^{-2\pi i}(\bar z-\bar a))=e^{2\pi i(l_0+\frac{1}{2})}w(z,\bar z)$ を満たせば

(3)
$$w=\sum_{\substack{l\equiv l_0 \bmod \mathbb{Z}\\ \mathrm{Re}\,l\geqq -N}}(c_l w_l[a]+c_l^* w_l^*[a]),\quad c_l,c_l^*\in\mathbb{C}$$

の形に一意的に展開できる。但し $w_l[a]=w_l(z-a,\bar z-\bar a)$, $w_l^*[a]=w_l^*(z-a,\bar z-\bar a)$，また $l_0\not\equiv\frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$ と仮定する（$l_0\equiv\frac{1}{2}$ の時は K_l を用いた修正項が必要）。特に $l_0\in\mathbb{Z}$，即ち $(a,\bar a)$ で二価に

分岐した解を"Fermi型", 更に $N=0$ の時には"狭義Fermi型"と呼ぶことにする。今分岐点 $(a_\mu, \bar{a}_\mu)$ $(\mu=1,\cdots,n)$ を指定して、その各々でFermi型であるような(1)の大域解を考えよう：

$$W_{a_1,\cdots,a_n} \underset{\text{def.}}{=} \{ w \mid (1)\text{の解で}, (a_\mu,\bar{a}_\mu)\text{でFermi型} \; (\mu=1,\cdots,n), \text{かつ} \; |w| = O(e^{-2m|z|}) \; (|z|\to\infty) \}$$

$$W^{\text{strict}}_{a_1,\cdots,a_n} \underset{\text{def.}}{=} \{ w\in W_{a_1,\cdots,a_n} \mid w \text{は} (a_\mu,\bar{a}_\mu)\text{で狭義Fermi型} \; (\mu=1,\cdots,n) \}$$

即ち、$w\in W_{a_1,\cdots,a_n}$ は $\mathbb{R}^2$ の二葉の分岐被覆 $\mathcal{R}=\{(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta}) \mid \zeta^2=\prod_{\mu=1}^{n}(z-a_\mu),\; \bar{\zeta}^2=\prod_{\mu=1}^{n}(\bar{z}-\bar{a}_\mu)\}$ 上の函数で、$(z,\bar{z},\zeta,\bar{\zeta}) \mapsto (z,\bar{z},-\zeta,-\bar{\zeta})$ に対し符号を変え、分岐点以外で(1)を満たし無限遠で指数減少するものである。

<u>定理</u>. (i) $W_{a_1,\cdots,a_n}$ は $\mathbb{C}[\partial_z,\partial_{\bar{z}},M_F]$-左加群.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} W^{\text{strict}}_{a_1,\cdots,a_n} = n$.

(iii)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\partial_z,\partial_{\bar{z}}]\underset{\mathbb{C}}{\otimes} W^{\text{strict}}_{a_1,\cdots,a_n} & \xrightarrow{\sim} & W_{a_1,\cdots,a_n}. \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ P(\partial_z,\partial_{\bar{z}})\otimes w & \longmapsto & P(\partial_z,\partial_{\bar{z}})w \end{array}$$

(1)の解 $w=\begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix}$ が特に $w_-=\overline{w_+}$ を満たす時、w を"実"であると呼ぶことにすれば、$W^{\text{strict}}_{a_1,\cdots,a_n}$ の元で実のもの全体 $W^{\text{strict},\mathbb{R}}_{a_1,\cdots,a_n}$ は実 n 次元ベクトル空間となり、更に

$$I(w,w') = -\mathrm{Re}\sum_{\mu=1}^{n} c_0^{(\mu)}(w)\cdot c_0^{(\mu)}(w')$$

によって正定値対称な内積が入ることが言える。ここに $c_0^{(\mu)}(w)$

は，wの$(a_\mu, \bar{a}_\mu)$における局所展開の、$w_0[a_\mu]$の係数（(3)）。いま$w_1, \cdots, w_n \in W^{\mathrm{strict}, \mathbb{R}}_{a_1, \cdots, a_n}$を基底とすれば，定理の帰結として

<u>系</u>. $\vec{w} = {}^t(w_1, \cdots, w_n)$とおけば，$n \times n$定数行列

B，Eが存在して

$$(4) \qquad M_F \vec{w} = (Bm^{-1}\partial_z - \bar{B}m^{-1}\partial_{\bar{z}} + E)\vec{w}, \quad \bar{E} = -E .$$

即ち，$W^{\mathrm{strict}, \mathbb{R}}_{a_1, \cdots, a_n}$の基底に対して holonomic system (1)+(4) が存在する。更に，係数B，Eが次の条件を満たすような基底$\vec{w}_{\mathbb{R}}$が唯一つ存在する：

$$B = e^{-H} A e^{H}, \ {}^\exists H：純虚歪対称, \ A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

E：純虚歪対称．

2. <u>holonomic system の変形</u>

分岐点$(a_\mu, \bar{a}_\mu)$を与えると，$\vec{w}_{\mathbb{R}}$，B，Eは一意的に定まった。それではこれらは分岐点の位置のどんな函数であろうか？ holonomic system の存在と同じ議論を適用すれば，次のことがわかる：

A，$\bar{A}$の1-formからなるn行n列の行列Φ，Ψが存在して

$$(5) \qquad d\vec{w}_{\mathbb{R}} = \Omega \vec{w}_{\mathbb{R}}, \quad \Omega = \Phi m^{-1}\partial_z + \bar{\Phi} m^{-1}\partial_{\bar{z}} + \Psi .$$

ここにdはA，$\bar{A}$による外微分，又$[\Phi, B] = 0$，Ψは実，歪対称．$P = M_F - Bm^{-1}\partial_z + \bar{B}m^{-1}\partial_{\bar{z}} - E$とおけば，(4)，(5)より

$$0 = d(P\vec{w}_R) = dP\cdot\vec{w}_R + P\cdot d\vec{w}_R = (dP - [\Omega, P])\vec{w}_R$$

$$0 = d(d\vec{w}_R) = (d\Omega - \Omega\wedge\Omega)\vec{w}_R$$

そこで，P, Ωに対する次の方程式系が自然に考えられる：

(6) $\quad dP - [\Omega, P] \equiv 0, \quad d\Omega - \Omega\wedge\Omega \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{D}(m^2 - \partial_z\partial_{\bar{z}})$

($\mathcal{D}$は微分作用素の層)。係数 B, E, Φ, Ψ で(6)を書き下せば次の完全積分可能な全微分方程式系が得られる：

$$(7)\quad \begin{cases} dB = -\Phi + [\Psi, B] + [\Phi, E] \\ d\bar{B} = -\bar{\Phi} + [\Psi, \bar{B}] + [\bar{\Phi}, \bar{E}] \\ dE = [\bar{\Phi}, B] - [\Phi, \bar{B}] + [\Psi, E] \\ d\Phi = [\Phi, \Psi]_+ {}^{(*)} \\ d\bar{\Phi} = [\bar{\Phi}, \Psi]_+ \\ d\Psi = [\Phi, \bar{\Phi}]_+ + \Psi\wedge\Psi \end{cases}$$

我々の $\vec{w}_R$ について実際(7)が成立つべきことは簡単な議論で示せる。今 $W^{\mathrm{strict}}_{a_1,\cdots,a_n}$のことは一応忘れて，一般に次の形の holonomic systemを考えよう：

(8) $\quad (m-\Gamma)\vec{w} = 0, \quad P\vec{w} \equiv (M_F - Bm^{-1}\partial_z + \bar{B}m^{-1}\partial_{\bar{z}} - E)\vec{w} = 0,$

ここにBは互いに異なる固有値 $a_1, \cdots, a_n$ をもつ複素対称行列，Eは純虚反対称行列とする。(8)は $(z, \bar{z}) \neq (a_\mu, \bar{a}_\mu)$の近傍では局所的に $2n$ 次元の正則解を持ち，また $(z, \bar{z}) = (a_\mu, \bar{a}_\mu)$の近傍では2次元の狭義Fermi型局所解と，$2(n-1)$次元の正則解をもつ。解空間の基底 $\vec{w}^{(1)}, \cdots, \vec{w}^{(2n)}$ を固定し，$\mathbb{R}^2 - \{(a_\mu, \bar{a}_\mu)\}_{\mu=1,\cdots,n}$

(*) $[x, y]_+ \underset{\mathrm{def.}}{=} xy + yx$ は反交換子.

のサイクル γ に沿う解析接続を $(\vec{w}^{(1)}, \cdots, \vec{w}^{(2n)})\cdot C_\gamma$, $C_\gamma \in GL(2n)$ とすれば，モノドロミー表現 $\gamma \mapsto C_\gamma$ が考えられるが，上述の事から $(a_\mu, \bar{a}_\mu)$ を正の向きに一周するサイクル γ_μ については $C_{\gamma_\mu} = P_\mu \begin{pmatrix} -I_2 & \\ & I_{2n-2} \end{pmatrix} P_\mu^{-1}$，$\exists P_\mu \in GL(2n)$，となっている。次に，(8) の係数 B, E を，方程式 (7) を満たす $A, \bar{A}$ の函数とする。この時解空間の基底 $\vec{w}^{(\mu)}$ $(\mu=1, \cdots, 2n)$ を適当に選べば，それらが $A, \bar{A}$ の函数として

(5)′ $\quad d\vec{w} = \Omega \vec{w}$ ，$\Omega = \Phi m^{-1} \partial_z + \bar{\Phi} m^{-1} \partial_{\bar{z}} + \Psi$

を満たすようにできる。実際方程式 (6) 或いは (7) は，全空間 $\{(z, \bar{z}, A, \bar{A})\}$ 内での方程式系として (5)′+(8) が compatible であることを保証する式に他ならぬからである。サイクル γ に沿う接続についても同じ方程式 $d[(\vec{w}^{(1)}, \cdots, \vec{w}^{(2n)})C_\gamma] = \Omega(\vec{w}^{(1)}, \cdots, \vec{w}^{(2n)})C_\gamma$ が成立つので，(5)′と比較して $dC_\gamma = 0$ を得る。即ち (7) の各積分多様体上モノドロミー表現 $\gamma \mapsto C_\gamma$ は不変に保たれる。しかしモノドロミー表現を与えただけでは積分多様体を特徴づけることは出来ない。例えば $n=2$ のとき，モノドロミー表現全体は1パラメタ族となるが，積分多様体は2パラメタ族が存在する。(7) の下で保存される方程式(8) の（モノドロミー以外の）不変量をすべて求めることは重要な問題と思われる。

後の便宜の為に，(7) を書き直しておこう。実直交変

換 $P \mapsto UPU^{-1}$, $U \in O(n)$, を行なうことにより，一般性を失うことなく B は正定値エルミート複素直交行列によって対角化できるとしてよい。即ち $B = e^{-H} A e^{H}$, H：純虚歪対称。この時

$$
(9) \quad \begin{cases} dF = -[F, \Theta] + [dA, {}^{t}G\bar{A}G] + [A, {}^{t}G\,d\bar{A}G] \\ dG = -G\Theta + \bar{\Theta}G \\ d\Theta = \Theta \wedge \Theta + [dA, {}^{t}G\,d\bar{A}G]_{+} \end{cases}
$$

ここに

$$
G = e^{-2H}, \quad F = e^{H} E e^{-H}, \quad \Phi = -e^{-H} dA\, e^{H}
$$

$$
\Psi = de^{-H} \cdot e^{H} + e^{-H} \Theta e^{H}, \quad [A, \Theta] + [dA, F] = 0 .
$$

3. 場の演算子 φ_F, φ^F と局所展開

演算子 φ_F, φ^F の構成については [1], [2] を参照して下さい。結果のみ記せば次のようになる。

$\psi(u)$ ：自由 Fermi 場の生成 $(u<0)$ 消滅 $(u>0)$ 演算子

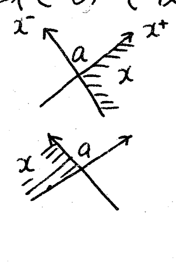
$$
[\psi(u), \psi(u')]_{+} = 2\pi|u|\,\delta(u+u'), \quad \psi(-u) = \psi(u)^{\dagger}
$$

$$
\psi_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{du}\, \sqrt{0+iu}^{\,\pm 1}\, e^{-i(x^{-}u + x^{+}u^{-1})m}\, \psi(u), \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{+}(x) \\ \psi_{-}(x) \end{pmatrix}
$$

$$
x = (x^{0}, x^{1}) \in \mathbb{R}^{2}, \quad x^{\pm} = \frac{1}{2}(x^{0} \pm x^{1}), \quad \underline{du} = \frac{du}{2\pi|u|}
$$

とした時，演算子 φ_F, φ^F は空間的領域での（反）交換関係

$$
\varphi_F(a)\,\psi_{\pm}(x) = \begin{cases} \psi_{\pm}(x)\,\varphi_F(a) \\ -\psi_{\pm}(x)\,\varphi_F(a) \end{cases}
$$



（φ^F については符号のつき方が逆）を満たすものとして構成され，次のノルム表示をもつ：

$$N(\varphi_F(a)) = e^{L_F(a)}, \quad N(\varphi^F(a)) = \psi_0(a)e^{L_F(a)}$$

$$L_F(a) = \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty} du\, du' \frac{-i(u-u')}{u+u'-i0} e^{-im(a^-(u+u')+a^+(u^{-1}+u'^{-1}))}\psi(u)\psi(u')$$

$$\psi_0(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\; e^{-im(a^-u+a^+u^{-1})}\psi(u) \quad .$$

ここに N は回転の理論におけるノルム写像（[1]）。ここで，a_1, a_2 が空間的（$(a_1-a_2)^2 = (a_1^0-a_2^0)^2-(a_1^1-a_2^1)^2 < 0$）ならば

$[\varphi_F(a_1), \varphi_F(a_2)]=0$, $[\varphi^F(a_1), \varphi^F(a_2)]=0$, $\varphi_F(a_1)\varphi^F(a_2) = \pm\varphi^F(a_2)\varphi_F(a_1)$ （$a_1^+-a_2^+ \lessgtr 0$）

であることに注意しておく。

$\psi(x)$ と $\varphi_F(a)$, $\varphi^F(a)$ の特殊な交換関係により，両者の積 $\psi(x)\varphi_F(a)$, $\psi(x)\varphi^F(a)$ は Euclid 時空へ解析接続され(*)，点 $x=a$ で二価に分岐することが分かる。実際これらは次のような狭義 Fermi 型の局所展開を持つ：

(10)
$$N(\psi(x)\varphi_F(a)) = \frac{1}{2}\psi_0(a)e^{L_F(a)}(w_0[a]+w_0^*[a]) + \sum_{l=1}^{\infty}(\varphi_l^F(a)w_l[a] + \varphi_{-l}^F(a)w_l^*[a])$$

$$\varphi_l^F(a) = \psi_l(a)e^{L_F(a)} \qquad (l\in\mathbb{Z})$$

$$\psi_l(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} du\,(iu)^l e^{-im(a^-u+a^+u^{-1})}\psi(u) \qquad (l\in\mathbb{Z}) \quad ,$$

(11)
$$N(\psi(x)\varphi^F(a)) = \frac{i}{2}e^{L_F(a)}(w_0[a]-w_0^*[a]) + \sum_{l=1}^{\infty}(\varphi_{F,l}(a)w_l[a] + \varphi_{F,-l}(a)w_l^*[a])$$

$$\varphi_{F,l}(a) = \psi_l(a)\psi_0(a)e^{L_F(a)} \qquad (l\in\mathbb{Z}) \quad .$$

（*）正確に言えばその任意の行列要素が二価函数に接続される。

但しここでは $W_\ell[a]$ は $W_\ell(-x^-+a^-, x^+-a^+)$ の意味とする。W_ℓ^* についても同様。ノルム写像は線型だから,

$$N(d\varphi_F) = dN(\varphi_F) = dL_F \cdot e^{L_F}$$
$$N(d\varphi^F) = (d\psi_0 + \psi_0 dL_F)\, e^{L_F}$$

であるが, L_F, ψ_ℓ の式からこれらは次のように表わされる.

$$(12) \quad \begin{aligned} N(d\varphi_F(a)) &= -i\varphi_{F,1}(a)\,d(-a^-) + i\varphi_{F,-1}(a)\,da^+ \\ N(d\varphi^F(a)) &= \varphi^F{}_1(a)\,d(-a^-) + \varphi^F{}_{-1}(a)\,da^+ \quad . \end{aligned}$$

4. τ函数と代数的関係式

点 $x, a_1, \cdots, a_n$ は互いに空間的位置にあるものとし, n 点のτ函数及び波動函数を次のように定める:

$$(13) \quad \tau_{F,n}(a_1, \cdots, a_n) = \langle vac | \varphi_F(a_1) \cdots \varphi_F(a_n) | vac \rangle$$

$$(14) \quad w_{F,n}^{(\mu)}(x; a_1, \cdots, a_n) = \langle vac | \psi(x) \varphi_F(a_1) \cdots \varphi^F(a_\mu) \cdots \varphi_F(a_n) | vac \rangle / \tau_{F,n} .$$

前節の議論から, $w_{F,n}^{(\mu)}$ ($\mu=1, \cdots, n$) は Euclid 時空へ解析接続されて点 $(a_\nu, \bar{a}_\nu)$ で狭義 Fermi 型となる $(\nu=1, \cdots, n)$. 実は $\vec{w}_F = {}^t(w_{F,n}^{(1)}, \cdots, w_{F,n}^{(n)})$ が 1 節で導入した $\vec{w}_R$ と $\vec{w}_F = \frac{1}{2}(\mathrm{ch} H)^{-1} \vec{w}_R$ なる関係で結ばれることが分かる。一方, 局所展開 (10), (11) 及び (12) から, $w_{F,n}^{(\mu)}$ の $(a_\mu, \bar{a}_\mu)$ における展開の第1項は $\tau_{F,n}$ の対数微分を与えることが分かる。$C_{F,\ell} = (\, c_\ell^{(\nu)}(w_{F,n}^{(\mu)})\,)_{\mu,\nu=1,\cdots,n}$, $C_{R,\ell} = (\, c_\ell^{(\nu)}(w_R^{(\mu)})\,)_{\mu,\nu=1,\cdots,n}$ とおけば, 結局

$$(15) \quad d \log \tau_{F,n} = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(C_{F,1} dA + \bar{C}_{F,1} d\bar{A})$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left((1-\mathrm{th}H)\tilde{C}_{R,1}dA + (1+\mathrm{th}H)\overline{\tilde{C}}_{R,1}d\bar{A}\right)$$

但し $\tilde{C}_{R,1} = C_{R,0}^{-1}C_{R,1}$ は，変形の方程式(9)と次の式で結ばれている： $F = e^{H}E\,e^{-H} = [\tilde{C}_{R,1}, A]$. (15)の右辺に現われる1-formをωとすれば，方程式(9)によってωがPoincaré不変な閉型式であることが示される。これは一般の積分多様体上でも何らかの不変量を与えているものと推測される。

$\tau_{F,n}$の他にも，(13)で$\varphi_F(a_{\mu_j})$を$\varphi^F(a_{\mu_j})$でおきかえて($j=1,\cdots,m$)得られる$\tau_{F,n}^{(\mu_1,\cdots,\mu_m)}$のような$2^{n-1}$通りのτ函数が考えられる（$\varphi^F$の数が奇数個あるものは零）。同様に(14)において$\psi(x)$を$\psi(x_1)\cdots\psi(x_k)$でおきかえ，$\varphi^F(a_{\mu_j})$をμ_j番目におきかえた波動函数 $W_{F,n}^{k,(\mu_1,\cdots,\mu_m)}(x_1,\cdots,x_k;a_1,\cdots,a_n)$ が考えられるが，これらの特異部分を比較することによって、次のような関係が導かれる：

$$W_{F,n}^{k,(\mu_1,\cdots,\mu_m)}(x_1,\cdots,x_k;a_1,\cdots,a_n)$$

$$= \mathrm{Pfaffian}\left|\begin{array}{cccccc}
W_{F,n}^{2}(x_1,x_2) & \cdots & W_{F,n}^{2}(x_1,x_n) & W_{F,n}^{1,(\mu_1)}(x_1) & \cdots & W_{F,n}^{1,(\mu_m)}(x_1) \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & W_{F,n}^{2}(x_{n-1},x_n) & W_{F,n}^{1,(\mu_1)}(x_{k-1}) & \cdots & W_{F,n}^{1,(\mu_m)}(x_{k-1}) \\
 & & & W_{F,n}^{1,(\mu_1)}(x_k) & \cdots & W_{F,n}^{1,(\mu_m)}(x_k) \\
 & & & \tau_{F,n}^{(\mu_1,\mu_2)} & \cdots & \tau_{F,n}^{(\mu_1,\mu_m)} \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & \tau_{F,n}^{(\mu_{m-1},\mu_m)}
\end{array}\right| \qquad (16)$$

これより特に，$k=1$の特異部分を比べて

$$(17)\qquad \tau_{F,n}^{(\mu_1,\cdots,\mu_m)} = \mathrm{Pfaffian}\left.\begin{array}{cccc} \tau_{F,n}^{(\mu_1,\mu_2)} & \tau_{F,n}^{(\mu_1,\mu_3)} & \cdots & \tau_{F,n}^{(\mu_1,\mu_m)} \\ & \tau_{F,n}^{(\mu_2,\mu_3)} & \cdots & \tau_{F,n}^{(\mu_2,\mu_m)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tau_{F,n}^{(\mu_{m-1},\mu_m)} \end{array}\right|$$

$$= \mathrm{Pfaffian}\left(i\,(\mathrm{th}\,H)_{\mu_j \mu_k} \right)_{j,k=1,\cdots,m}$$

を得る。

〈文　献〉

[1] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Studies on holonomic quantum fields I. Proc. Japan Acad. 53A, 6-10 (1977).

[2] ――――――, 研究集会「超函数と線型微分方程式V」の講演（数理研講究録掲載予定）

[3] ――――――, Studies on holonomic quantum fields II, III（準備中）.

[4] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy and E. Barouch, Phys. Rev. B13, 316-374 (1976).

[5] B. M. McCoy, C. A. Tracy and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. 38, 793-796 (1977).

[6] ――――――, J. Math. Phys. 18, 1058-1092 (1977).