数理解析研究所講究録
第295巻 1977年 92-95



# 線型微分方程式系の正則変形（H. Lewy のある正則性定理をめぐって）

京大 数解研　　河合隆裕

最近 H. Lewy 氏が，正則写像の境界挙動に関係してある興味深い正則性の定理を証明され(to appear) 更に，多変数の場合への一般化を問題として提出された。本稿では，"正則なパラメーターを持つ微分方程式系の解の構造を調べる"という見地から，最も望ましい形で，Lewy 氏の問題に対して解答を与える。

まず次のような形の方程式を考えよう。（Lewy 氏自身の扱われたのは，これとやや異る物であるが，氏自身の議論がこの場合にも適用されることは承知してみえた。(private communication))

(1)　$A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$

但し　$u = u(x_1, x_2, x_3)$,　$A_2, A_3 \in \mathbb{C}$,　$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, near 0

勿論 (1) は（定数係数であり）特に珍しい現象を起す方程式ではない。しかし，もしここで $A_2$, $A_3$ を $z_1 = x_1 + iy_1$ の正則函数とし，更に，解 $u$ も $z_1$ の正則函数（に拡張できる），としてみよう。即ち，微分方程式 (1) を正則に変形する時，解も正則に変形し得るかどうかを考えてみよう。

ここで Lewy 氏の提出された条件は次のものである：

(2)　$A_2 \overline{A_3} \neq \overline{A_2} A_3$

(3)　$A_2, A_3 \in \mathbb{R}$,　　$A_2 \frac{\partial A_3}{\partial z_1} \neq A_3 \frac{\partial A_2}{\partial z_1}$

定理 1 (Lewy) (2) 又は (3) の条件の下に, (1) の (超函数) 解を正則に変形すれば, 解は必然的に実解析的である。

Lewy 氏自身の証明はかなり高級であるが, 問題を次のように書き変えれば, そのカラクリは明らかになる:

$$
(4)\quad \begin{cases} A_2(z_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + A_3(z_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = 0 \end{cases}
$$

の解の正則性や如何?

こうしてみれば, (2) は, 楕円性の条件, (3) は (4) が Lewy - Mizohata 型になる為の条件であることは見易い。ここ迄来れば, Lewy 氏が問題とされた (として提出) 次の場合の条件を見出すことは容易である。

$$
(5)\quad \frac{\partial u}{\partial x_1} + b\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + a_4\frac{\partial u}{\partial x_4} = 0
$$

において $b$, $a_3$, $a_4$ は実数値実解析函数とする。

今, もし, $\left\langle (a_3, a_4) \parallel \left(\dfrac{\partial a_3}{\partial z_1}, \dfrac{\partial a_4}{\partial z_1}\right) \parallel \left(\dfrac{\partial a_3}{\partial z_2}, \dfrac{\partial a_4}{\partial z_2}\right)\right\rangle$ とはならないとする。この時, $z_1, z_2$ について正則な (5) の解は必ず実解析的である。勿論 $a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ として, $a_3\overline{a_4} \neq \overline{a_3}a_4$ でも結論は同じである。

高階の場合にも同様の定理を一般的に得ることが出来るけれど、神秘性が薄らぐので、それをここには記さない。尚，高次のコホモロジー群を考えることも面白い。実際，Zerner の正則パラメーターを持つ基本解の存在の議論をこの立場から捉え得ることは以前に注意した。(1974年の数学会での講演)

詳細は，現在準備中の論文に譲りたい。

Acknowledgment: The speaker would like to thank Professor H. Lewy for showing his inspiring manuscript to the auther before publication.

追記1： 予稿集を準備した後に判ったことを一、二追記する。主題は"方程式系の変形の際，何が保たれるのか？"ということである。主要結果は次の通り；

定理： $X$ を実解析的コンパクト多様体，$\mathcal{M}_0$ を $X$ 上の楕円型方程式系とする。今 $\mathcal{M}_t$ を $\mathcal{M}_0$ を佐藤の(強い)意味で変形した$X$上の方程式系とする。（"強い"という形容詞は，変形の方程式として，係数に特異点を持つ物を許さないことを意味する。）この時

$$\mathrm{Ext}^j(X;\mathcal{M}_t,\mathcal{B}) \simeq \mathrm{Ext}^j(X;\mathcal{M}_{t'},\mathcal{B})$$

がすべての $j$ に対して成立する。

又，議論はまだ十分でないが，non-compact な場合，たとえば，ポテンシャル散乱論での $S$-行列の極の位置，境界値問題に対する Green 函数の holonomic character (少くとも二階の場合) 等が (最も modest に言って) 本質的にはほぼ同様の方法で扱えると思われる。尚，特に上の定理は(その特殊な場合として)佐藤の意味での変形が，常にスペクトルを保存していることを意味しており，たとえば "iso spectrum deformation or rigidity" という問題にもう一つの視点を与えると言えよう。